

СЕКЦИЯ 3.
Проектирование систем автоматического
управления и регулирования

Часть 1.

Председатель:
д. ф.-м. н., профессор Е. И. Веремей

Оглавление

Антропов А. Т., Удод А. С. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА	784
Асанов А. З., Ахметзянов И. З. КАНОНИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗМЕРА СРЕДСТВАМИ MATLAB	796
Асмыкович И. К., Овсянников А. В. О СИНТЕЗЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВО МНОГОВХОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ В СРЕДЕ MATLAB	805
Афонин В. В., Мурюмин С. М. ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ	813
Ахметзянов И. З. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КАНОНИЗАЦИИ ПРИ СИНТЕЗЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЛОЖЕНИЯ	828
Баунин В. Г., Швецов Н. В. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ЭГСС С СИЛОВЫМ ГИДРОЦИЛИНДРОМ В СРЕДЕ MATLAB	841
Быстровзоров С. В., Сульженко П. С., Фадеев Г. В., Дорин А. Б., Ермак М. Г. ИНТЕГРАЦИЯ MATLAB С КОНТРОЛЛЕРОМ SIMATIC И ОДНОПЛАТНЫМИ СПЕКТРОМЕТРАМИ СЕРИИ SBS	858
Веремей Е. И. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО СИНТЕЗА В СРЕДЕ MATLAB	864
Веремей Е. И., Коровкин М. В. ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА NCD ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	884
Воронков В. С., Кривицкая А. В. ОБОСНОВАНИЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ ЖЕСТКОГО ВАЛА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATLAB	897
Воронов Е. М., Ворожищев А. С., Карпунин А. А., Репкин А. Л., Серов В. А. ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГООБЪЕКТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (ПС «МОМДИС») НА ОСНОВЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ ИГРОВЫХ РЕШЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В СЛОЖНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ	907

Гарганеев А. Г., Ланграф С. В. , Яровой А. Т. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ	940
Груздев В. В. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА МАТЛАВ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДОМ ЖЕЛАЕМЫХ ЛАЧХ.....	946
Деменков Н. П. ТЕХНОЛОГИИ МАТЛАВ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИИ ЗДАНИЙ.....	956
Жданов И. В. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕТОДОМ НЕЧЕТКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	968
Квитко А. Н. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ	972

УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА

Антропов А. Т., Удод А. С.

ЗАО «ЭлеСи», Томск,

e-mail: technid@elesy.tomsk.su, asu@ie.tusur.ru

Каждый из традиционных и современных методов идентификации имеет определенные достоинства, любое из которых может оказаться решающим в условиях конкретной задачи. Это относится в полной мере к одному из двух ведущих методов расчета САУ (и идентификации, в частности) — методу передаточных функций (ПФ) на основе преобразований Лапласа и Фурье. Основная привлекательность метода заключается, видимо, в замене сложных операций с функциями времени более простыми действиями в области изображений. В тоже время метод имеет специфическую особенность, которая вызывает определенные затруднения и даже ограничивает область его применения. Она связана с наличием в получаемых изображениях комплексной или мнимой переменной. С целью снижения возникающих трудностей приходится вводить дополнительный этап, осуществляющий переход к функциям вещественного аргумента. Примерами могут служить различные частотные характеристики — амплитудные, фазовые и др. Между тем упомянутый дополнительный этап перехода к вещественным функциям, являясь по сути своей вспомогательным, может оказаться, в ряде случаев, весьма сложным и, как следствие этого, и сам метод. Среди подобных методов наиболее распространены частотные, связанные с подачей на вход объекта управления пробных гармонических сигналов и получением на этой основе частотных характеристик ОУ, либо с получением этих характеристик по экспериментальным частотным или импульсным функциям. Наличие мнимой переменной и здесь может влиять на сложность вычислений. Одним из путей устранения этого недостатка является применение вещественного интерполяционного метода (ВИМ) [1].

Интерполяционные методы удобно классифицировать по области расположения узлов.

1. Все узлы расположены на мнимой оси.
2. Узлы — положительные вещественные числа.
3. Узлы совпадают с полюсами системы.
4. Узел кратности n в начале координат.

Особый интерес представляют две первых группы. Обе они используют интегральное преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad p = \delta + j\omega, \quad (1)$$

которое ставит в соответствие функции-оригиналу $f(t)$ изображение $F(p)$. В частных случаях, когда $\delta=0$ или $\omega=0$, можно получить частотное представление $F(j\omega)$ или вещественную функцию $F(\delta)$, $\delta \in [C, \infty]$, $C \geq 0$.

Основой ВИМ является вещественное интегральное преобразование

$$F(\delta) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty], \quad C \geq 0. \quad (2)$$

Формула (2) ставит в соответствие функции-оригиналу $f(t)$ функцию-изображение $F(\delta)$. Значение параметра C должно выбираться из условия сходимости интеграла (2). Условия существования и единственности функции $F(\delta)$ накладывают ограничения на оригинал $f(t)$:

- функция $f(t)$ и ее производные должны быть непрерывны;
- $f(t)=0$ для всех $t < 0$;
- функция $f(t)$ должна удовлетворять условию

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty,$$

если в (2) принято $C=0$.

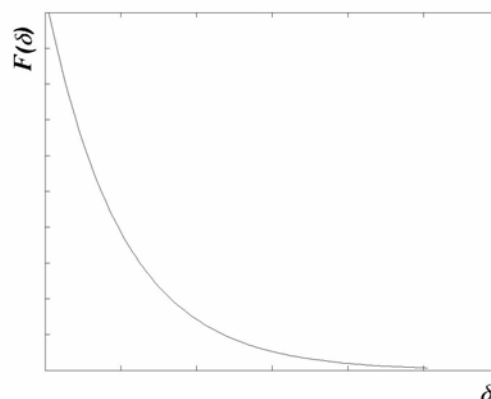
Формула (2) может быть получена из формулы прямого преобразования Лапласа (1) при замене комплексной переменной $p = \delta + j\omega$ на вещественную δ .

Вещественное δ -преобразование обладает рядом существенных с практической точки зрения свойств.

1. Функции $F(\delta)$ имеют графическое представление. Это делает их наглядными, отражая определенные особенности на плоскости. Для иллюстрации этого свойства рассмотрим оригинал $f(t) = Ae^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Его δ -изображение найдется по выражению (2)

$$F(\delta) = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-\delta t} dt = \frac{A}{\delta + \alpha}.$$

Тогда графическое представление функции $F(\delta)$ будет иметь вид, показанный на рис. 1.

Рис. 1. График функции $F(\delta)$.

Рассматриваемое свойство обеспечивает высокую наглядность и дополнительную возможность анализа как исходных данных, так и получаемых результатов.

2. Функцию $F(\delta)$ можно получить не только прямым путем, используя формулу (2), но и косвенным, когда известно изображение по Лапласу $F(p)$. В этом случае функция $F(\delta)$ находится путем формальной замены p на δ . Данное обстоятельство позволяет использовать широкий спектр справочных материалов по преобразованию Лапласа, что чрезвычайно важно с практической точки зрения.

3. Для функций $f(t)$ и $F(\delta)$, где $f(t) \hat{=} F(\delta)$, справедливо так называемое «перекрестное свойство», состоящее в том, что при больших значениях δ изображение $F(\delta)$ характеризует поведение оригинала на начальном участке времени. И наоборот, при малых значениях δ функция $F(\delta)$ характеризует поведение оригинала $f(t)$ преимущественно на конечном интервале времени t . При решении приближенных задач данное свойство оказывается очень важным, т. к. позволяет перераспределять погрешность в области времени, используя интерполяционный механизм в области изображений.

Понятие вещественных функций-изображений $F(\delta)$ распространяется на сигналы входа и выхода линейной динамической системы и передаточные функции вход-выход. Передаточные функции в терминах δ - преобразования могут быть получены, как уже отмечалось ранее, двумя способами. Первый из них предполагает непосредственное использование выражения (2). Тогда, в соответствии с определением, ПФ может быть представлена как отношение изображения $Y(\delta)$ выходного сигнала $y(t)$ к изображению $X(\delta)$ входного сигнала $x(t)$

$$W(\delta) = \frac{\int_0^{\infty} y(t)e^{-\delta t} dt}{\int_0^{\infty} x(t)e^{-\delta t} dt} = \frac{Y(\delta)}{X(\delta)}, \quad (3)$$

где $y(t)$ и $x(t)$ удовлетворяют приведенным выше условиям. Полученное выражение (3) получило название вещественной ПФ.

Для систем с сосредоточенными параметрами передаточные функции по Лапласу являются дробно-рациональными вида

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + 1}, \quad n \geq m.$$

В этом случае вещественные передаточные функции (3) будут иметь вид

$$W(\delta) = \frac{Y(\delta)}{X(\delta)} = \frac{b_m \delta^m + b_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + 1}, \quad n \geq m, \quad (4)$$

или, при наличии в системе интегрирующих и дифференцирующих звеньев,

$$W(\delta) = \frac{b_m \delta^m + b_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + b_0}{\delta^v (a_n \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + 1)}, \quad n \leq n, \quad v = 0, 1, 2, \dots,$$

$$W(\delta) = \frac{\delta^\mu (b_m \delta^m + b_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + b_0)}{a_n \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + 1}, \quad n \leq n, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$$

Если вид лапласовой ПФ известен, то переход к ее вещественному аналогу осуществляется достаточно просто — путем замены комплексной переменной p на вещественную δ .

В общем случае при решении задачи идентификации можно выделить два случая [3]. В первом случае структура и параметры объекта неизвестны. В такой ситуации необходимо определить как структуру объекта, так и ее параметры. Во втором случае говорят о параметрической идентификации или об идентификации в узком смысле, когда определению подлежат лишь значения параметров модели объекта управления.

Пусть дан линейный непрерывный стационарный одномерный объект управления. Будем считать, что измеряемые сигналы $x(t)$, $y(t)$ не содержат помех. Схема такого объекта представлена на рис. 2.

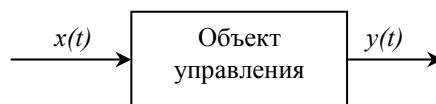


Рис 2. Схема объекта управления в форме «вход-выход».

Входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы удовлетворяют всем необходимым условиям существования вещественных изображений $X(\delta)$ и $Y(\delta)$ соответственно. Тогда вещественная передаточная функция объекта управления будет иметь вид

$$W_{object}(\delta) = \frac{Y(\delta)}{X(\delta)}. \quad (5)$$

В случае объектов управления с сосредоточенными параметрами функция $W(\delta)$ является дробно-рациональной вида (4).

Тогда задача параметрической идентификации будет включать в себя следующее:

1) определение по известным сигналам $x(t)$ и $y(t)$ численных характеристик (ЧХ) объекта управления $\{W_{object}(\delta_i)\}_\eta$;

2) вычисление (по найденным $\{W_{object}(\delta_i)\}_\eta$) параметров $a_k, b_j, k=1, 2, \dots, n, j=0, 1, \dots, m$ вещественной ПФ (4) при известных значениях степеней m и n полиномов числителя и знаменателя.

Для разработки методики определения ЧХ объекта управления $\{W_{object}(\delta_i)\}_\eta$ по экспериментальным данным примем в качестве входного воздействия единичный ступенчатый сигнал $x(t)=I(t)$, изображение которого согласно (2) будет иметь вид

$$X(\delta) = \int_0^\infty 1(t) \cdot e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta}, \quad \delta \in [C, \infty], \quad C > 0.$$

Тогда из выражения (5) получим

$$W_{object}(\delta) = \delta \cdot Y(\delta) = \delta \cdot H_{object}(\delta), \quad (6)$$

где $H_{object}(\delta)$ - изображение переходной характеристики объекта $h_{object}(t)$.

С учетом (2) можно получить формулу связи изображения $H_{object}(\delta)$ с переходной характеристикой объекта управления $h_{object}(t)$

$$H_{object}(\delta) = \int_0^\infty h_{object}(t) \cdot e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty], \quad C > 0.$$

В этом случае (6) запишется в виде

$$W_{object}(\delta) = \delta \cdot \int_0^\infty h(t) \cdot e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty], \quad C > 0. \quad (7)$$

На основе выражения (7) можно найти искомую численную характеристику $\{W_{object}(\delta_i)\}_\eta$, i -й элемент которой определяется выражением

$$W_{object}(\delta_i) = \delta_i \int_0^\infty h(t) e^{-\delta_i t} dt, \quad i=1 \dots \eta. \quad (8)$$

В реальных условиях при использовании цифровой техники функция $h_{object}(t)$ представляет собой совокупность своих значений $h(t_r), r=1, 2, \dots, N, N<\infty$, поэтому величину $W_{object}(\delta_i)$ из выражения (8) следует искать на основе численного интегрирования. Так в простейшем случае, когда используется метод прямоугольников, получим

$$W_{object}(\delta_i) = \delta_i \sum_{r=1}^N h(t_r) \cdot e^{-\delta_i t_r} \Delta t_r. \quad (9)$$

Таким образом, расчетная формула (8) позволяет найти ЧХ исследуемого объекта. Графическое представление численной характеристики может иметь вид решетчатой функции, представленный на рис. 3. Как видно из рисунка, ЧХ представляет собой конечный набор цифр и потому удобна для использования в качестве модели в вычислительных средствах и системах.

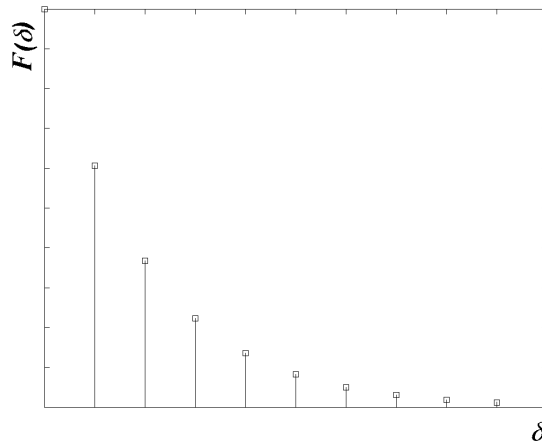


Рис. 3. Вид численной характеристики объекта.

Для использования формулы (9) нужно знать несколько ее параметров: значения узлов интерполирования δ_i , шаг интегрирования Δt_r , число членов суммы N (выборку экспериментальных данных).

На второй этапе параметрической идентификации необходимо получить коэффициенты вещественной ПФ (4). Составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов $a_k, b_j, k=1, 2, \dots, n, j=0, 1, \dots, m$:

$$W_{\text{object}}(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + 1}, \quad i=1 \dots \eta. \quad (10)$$

Здесь левая часть СЛАУ — найденные, согласно (9) элементы ЧХ объекта управления. Число уравнений η , входящих в СЛАУ определяется по формуле $\eta=n+m+1$, однако величину η можно уменьшить, принимая внимание априорное знание коэффициента b_0 (величина установившегося значения переходной характеристики объекта). Полученные в результате решения системы уравнений (10) значения коэффициентов a_k, b_j и найденное значение b_0 являются коэффициентами вещественной ПФ. Для перехода к лапласовой ПФ достаточно заменить вещественную δ на комплексную p . Решение, полученное на этом этапе может быть приближенным из-за наличия погрешностей и в этой связи необходимо выбрать критерий адекватности модели объекту и с его помощью проверить полученное решение.

В общем случае оценку полученного на основе ВИМ решения задачи идентификации можно осуществлять:

- 1) в области вещественных изображений;
- 2) во временной области.

В области изображений такая задача сводится к получению и оценке функции

$$\Delta W(\delta) = W_{object}(\delta) - W_{model}(\delta),$$

где $W_{object}(\delta)$, $W_{model}(\delta)$ — соответственно точная и найденная в результате решения задачи идентификации передаточные функции ОУ.

Тогда критерий адекватности модели объекту можно принять в виде

$$\max_{\delta_1 \leq \delta < \infty} |\Delta W(\delta)| \leq d, \quad (11)$$

где d — заданная величина.

Однако на практике при автоматической настройке САУ функция $W(\delta)$ является неизвестной. Кроме того, в ряде случаев может оказаться, что найденное решение удовлетворяет критерию (11) в области изображений, но при этом не обеспечивается заданная точность в области времени. В этой связи целесообразно оценивать решение в области времени, т. е. вторым способом. Для этого введем в рассмотрение функцию ошибки

$$\Delta h(t) = h_{object}(t) - h_{model}(t),$$

где $h_{model}(t)$ - переходная характеристика модели ОУ.

Тогда критерий адекватности модели объекту может иметь вид

$$A = \max_{t \in [0, t_p]} \left| \frac{\Delta h(t)}{h_{object}(t)} \right| \leq A_{don}, \quad (12)$$

где A_{don} — допустимая относительная ошибка идентификации.

Достоинством критерия (12) является его наглядность, простота в использовании и гарантия того, что модель объекта будет соответствовать объекту в области времени. Выполнение данного критерия при решении задачи параметрической идентификации позволяет говорить о ее завершенности. В ситуации, когда требуемое решение не найдено, следует изменить значение узла δ_l и вновь повторить процедуру расчета коэффициентов ПФ (4). После нескольких подобных итераций можно получить решение, которое удовлетворяет критерию (12). Продолжая итерации, можно получить решение, минимизирующее параметр A при других равных условиях. В то же время следует выделить практически важную и реальную ситуацию, когда при любых значениях δ_l условие (12) не может быть выполнено. Это возможно в двух случаях. Во-первых, относительная ошибка A не может оказаться меньше заданной величины A_{don} из-за низкого порядка выбранной ПФ $W(p)$. Во-вторых, для принятого порядка ПФ $W(p)$ оказалась малой допустимая относительная ошибка A_{don} . В целом оба случая отражают одно и то же явление, суть которого иллюстрирована графиками на рис. 4. ($A_{don}=0,05$, структура моделей отражена следующим образом -

W_{ba} , где b и a – порядок полинома числителя и знаменателя, соответственно). Рассмотрение этих случаев порознь позволяет выделить пути преодоления затруднения: необходимо либо увеличить порядок ПФ $W(p)$, либо снизить требования по точности, увеличив значение A_{don} .

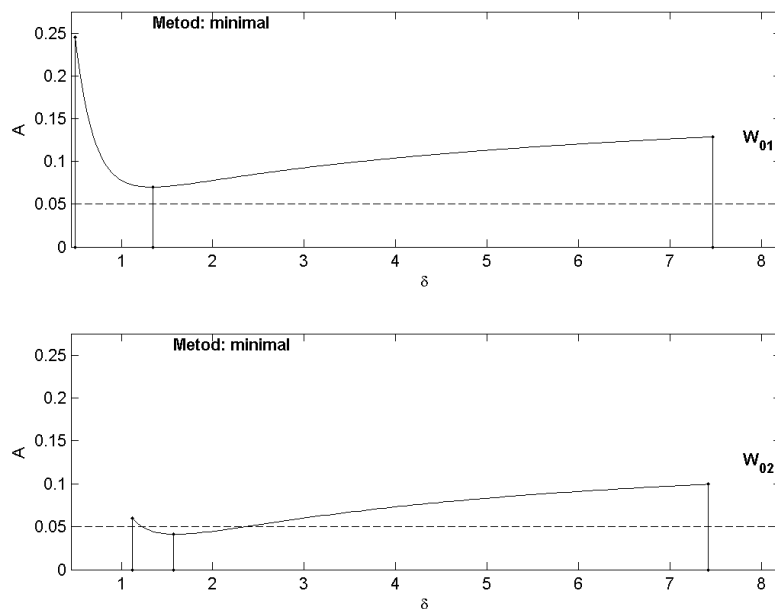


Рис. 4. Минимизация относительной ошибки A_{min} .

Для пояснения изложенного материала рассмотрим пример решения задачи идентификации, реализованный в системе MATLAB.

В качестве объекта управления взят модельный пример, переходная характеристика которого приведена на рис. 5.

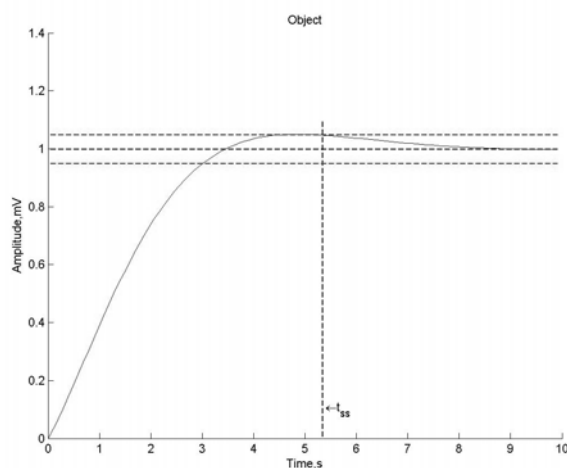


Рис. 5. Переходная характеристика модельного примера.

Таблица 1.
Объект управления.

ПАРАМЕТР:	ЗНАЧЕНИЕ:
Имя файла трендов:	5@1@5@W12.mor
Установившееся значение, (mV):	0.99817
Время установления, (с):	5.2476
Смещение нуля, (ед):	0
Перерегулирование, (%):	4.9633
Период квантования, (с):	0.097177
Пользовательское время, (с):	9.9121

С учетом изложенных замечаний к минимизации критерия адекватности, задачу идентификации будем решать выбором наиболее оптимальной структуры модели (этап структурной идентификации). Действительно, оптимальный выбор модели можно осуществить, имея данные о характеристиках различных по структуре моделей. Объект имеет небольшое (около 5 %) , перерегулирование, без запаздывания, с временем переходного процесса около 5 секунд. Ожидаем моделирование этого объекта с заданной точностью моделями 2-го порядка. Потребуем от модели относительной ошибки идентификации не более 0.05.

Результаты идентификации представлены на рис. 6–9 и в табл. 2.

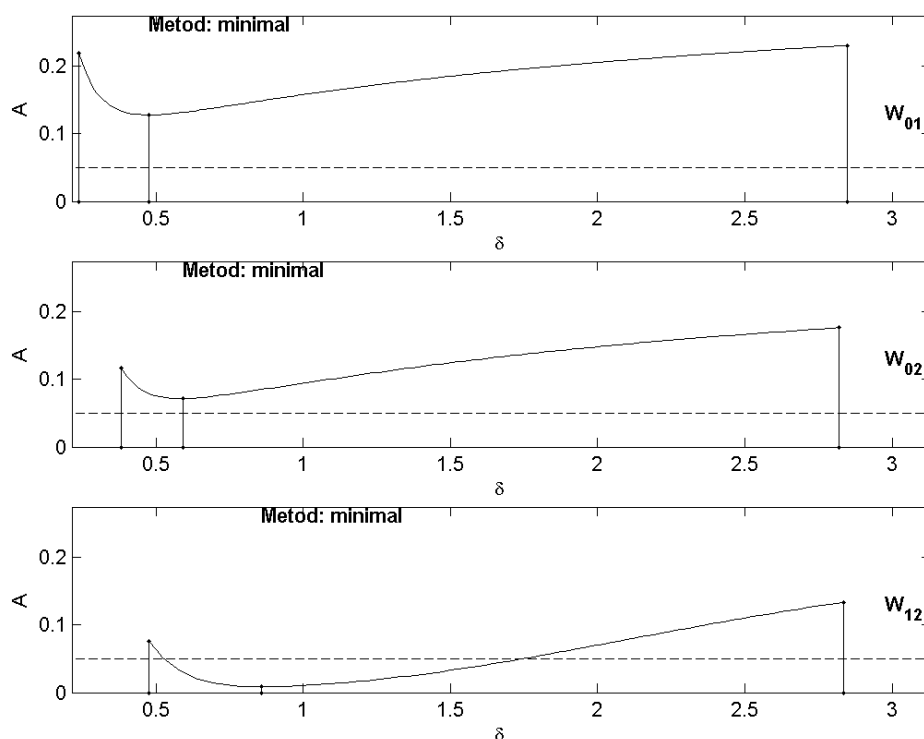


Рис. 6.- Зоны узлов интерполирования для подобранных моделей.

Таблица 2.
Подобранные модели.

Номер модели по порядку:	1	2	3
Идентификатор модели:	1	2	3
Левый узел интерполяции:	0.2382	0.38113	0.47641
Робастный узел интерполяции:	0.47641	0.59075	0.85754
Критерий адекватности :	0.12807	0.071825	0.0086163
Правый узел интерполяции:	2.8465	2.8203	2.8346
Приведенная зона дельта (%):	91.25	85.3333	82.5
Коэффициент полинома ПФ a3:	0	0	0
Коэффициент полинома ПФ a2:	0	0.41424	1.4213
Коэффициент полинома ПФ a1:	1.6453	1.4262	1.7096
Коэффициент полинома ПФ b2:	0	0	0
Коэффициент полинома ПФ b1:	0	0	0.45063
Коэффициент полинома ПФ b0:	0.99817	0.99817	0.99817

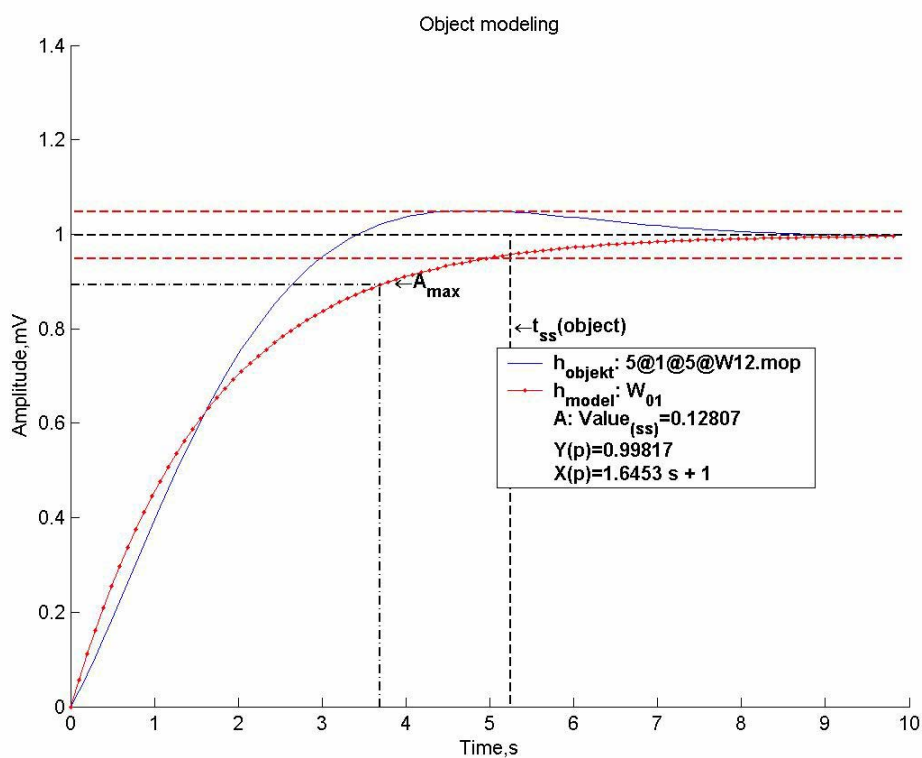


Рис. 7. Моделирование объекта ПФ вида W_{01}

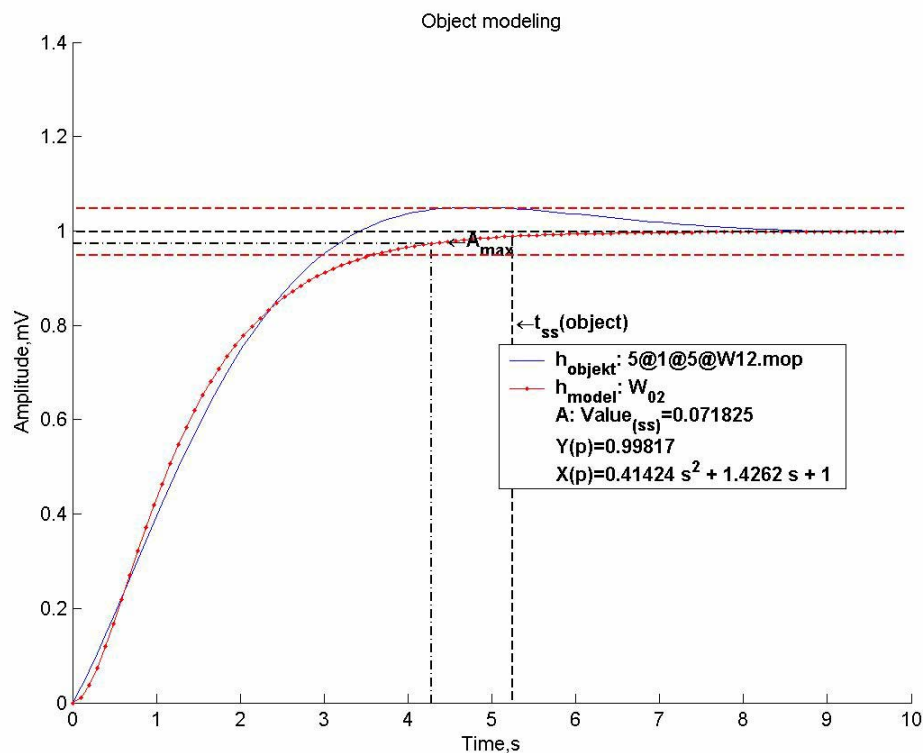


Рис. 8. Моделирование объекта ПФ вида W_{02} .

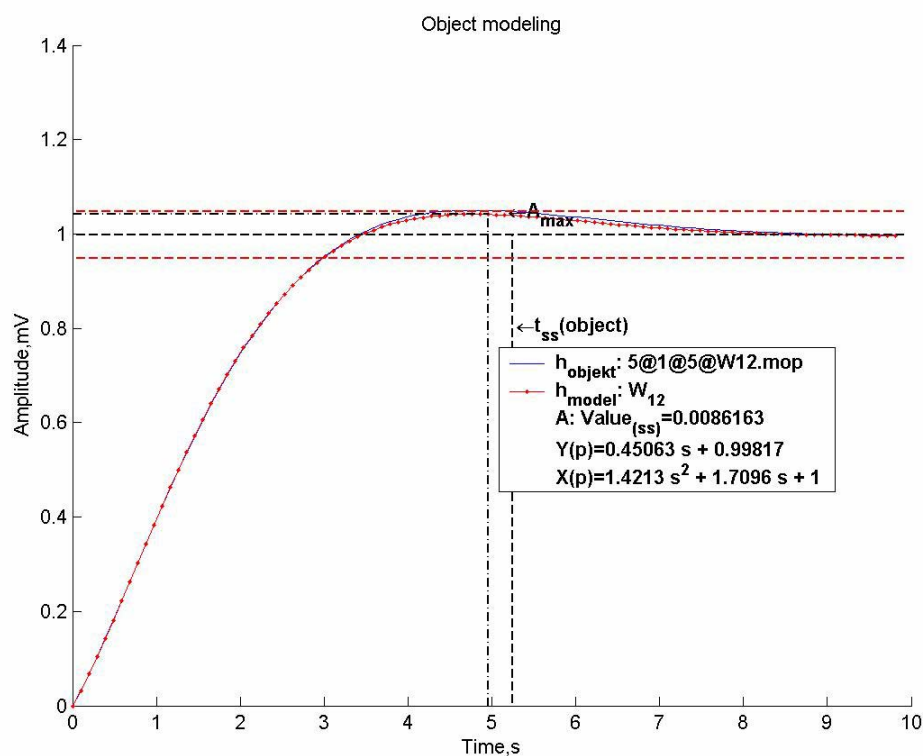


Рис. 9. Моделирование объекта ПФ вида W_{12} .

Моделью, отвечающей заданному критерию адекватности ($0.0086 < 0.05$), является модель второго порядка вида W_{12} . При менее жест-

ких требованиях к критерию адекватности модели объекту, структуру ПФ можно упростить.

За рамки данной статьи выходят вопросы обеспечения устойчивости моделей, вопросы связанные с выбором закона распределения узлов интерполирования и выбора значения узла для первой (как правило примерной итерации), идентификации объектов управления с транспортной задержкой, идентификации в условиях помех. Алгоритм идентификации оптимизирован и проверен с помощью средств моделирования MATLAB и реализован на встроенном интеллектуальном регуляторе. Необходимо заметить, что применение нами вещественного интерполяционного пока ориентировано на реализацию регулятора 2-го порядка с самонастройкой в момент включения. Реализованный в настоящее время алгоритм идентификации требует именно такой организации регулятора. Тем не менее класс объектов, которые не относятся к технологически непрерывным, достаточно велик. Следует сказать, что нет теоретических ограничений и значительных технических трудностей в применение вещественного интерполяционного метода для идентификации объектов, находящихся в рабочем установившемся режиме.

Литература

1. Гончаров В. И. Вещественный интерполяционный метод синтеза систем автоматического управления.— Томск: Томский политехнический университет, 1995.— 108 с.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.— 831 с.
3. Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник.—СПб.: Питер, 2002.— 444 с.

УДК 004.42:519.612

КАНОНИЗАЦИЯ МАТРИЦ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗМЕРА СРЕДСТВАМИ MATLAB

Асанов А. З., Ахметзянов И. З.

*Камский государственный политехнический институт, Набережные Челны,
e-mail: asx@asan.chelny.ru*

Введение

Решение задач управления многомерными и многосвязными системами сопряжено со значительными трудностями. Многие классические подходы и методы, исправно «работавшие» в случае одномерных систем (SISO системы), оказалось, не переносятся на общий матричный случай, решения для матричных (более чем один вход/выход, МИМО системы) систем могут обладать качественно иными свойствами [1]. Так, задача обеспечения заданного расположения на комплексной плоскости нулей системы, достаточно легко решаемая для SISO систем, для МИМО систем встречает иногда непреодолимые трудности. В тоже время задача обеспечения требуемого распределения полюсов на комплексной плоскости в классе систем с несколькими входами может иметь неограниченное число решений. Существуют и другие проблемы анализа и синтеза МИМО систем.

Одним из современных и весьма перспективных подходов к решению целого ряда задач теории систем (моделирование, управление, анализ синтез, наблюдение и т. д.) в классе МИМО-систем является технология вложения систем [2]. Технология (методика) вложения систем основана на использовании современных результатов алгебры частных в задачах анализа и синтеза МИМО динамических систем. Эффективность применения технологии вложения проиллюстрирована на ряде задач, практически весьма трудно решаемых классическими методами [3, 4].

Суть технологии вложения систем заключается в представлении исследуемой динамической системы в специальной форме с последующим выполнением ряда преобразований с так называемой проблемной матрицей и матрицами вложения. В результате решение задачи представляется в виде системы матричных уравнений. В дальнейшем возможно использование различных способов решения полученных матричных уравнений, но наиболее эффективным считается получение аналитического решения так как позволяет описать весь класс решений. Кроме того, такой подход позволяет определить условия существования решений.

Для аналитического решения матричных уравнений широкого класса был предложен новый метод [2, 5], названный авторами методом канонизации, основными элементами которого являются так называемые правый

и левый матричные делители нуля матрицы, левый, правый и сводный канонизаторы матрицы. Несмотря на идейную простоту этих новых введенных понятий, остается проблема нахождения этих специальных матричных конструкций для матриц произвольного размера.

В данной работе предлагается программная реализация планшетного способа вычисления левого и правого матричных делителей нуля, правого, левого и сводного канонизаторов матрицы произвольного размера или просто — программная реализация канонизации матрицы произвольного размера.

Основные понятия метода канонизации матрицы

В соответствии с [5] основные понятия метода заключаются в следующем.

Пусть дана произвольная матрица A размера $m \times n$.

Утверждается, что можно подобрать такую матрицу \bar{A}^R , содержащую n строк и произвольное число $q > 0$ столбцов, что всегда одновременно выполняются тождество и два неравенства

$$A\bar{A}^R = 0_{m \times q}, \quad A \neq 0_{m \times n}, \quad \bar{A}^R \neq 0_{n \times q}, \quad (1)$$

где $0_{i \times k}$ — нулевая матрица размера $i \times k$. Если подобрать такую матрицу невозможно, то у матрицы A правый делитель нуля отсутствует. Этот факт можно отражать записью $\bar{A}^R = 0_{n \times 0}$, полагая, что такой делитель нуля представляет собой матрицу с нулевым числом столбцов, т. е. $q = 0$.

Матрица \bar{A}^R называется *правым делителем нуля* матрицы A .

Чаще всего полагают, что правый делитель нуля \bar{A}^R матрицы A имеет размер $n \times r_R$ и максимальный, т. е. равный r_R , ранг.

Аналогично с учетом симметрии вводится *левый делитель нуля* \bar{A}^L размера $r_L \times m$.

Утверждается, что можно подобрать такую матрицу \bar{A}^L , содержащую произвольное число $v > 0$ строк и m столбцов, что всегда одновременно выполняются тождество и два неравенства

$$\bar{A}^L A = 0_{v \times n}, \quad A \neq 0_{m \times n}, \quad \bar{A}^L \neq 0_{v \times m}. \quad (2)$$

Если подобрать такую матрицу невозможно, то у матрицы A левый делитель нуля отсутствует, что можно отражать записью $\bar{A}^L = 0_{0 \times m}$, полагая, что такой делитель нуля представляет собой матрицу с нулевым числом строк, т. е. $v = 0$.

Матрица \bar{A}^L называется *левым делителем нуля* матрицы A .

Известно [6], что любая матрица A в общем случае может быть представлена в следующем виде:

$$A = T_y^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} T_x = T_y^{-1} A' T_x, \quad (3)$$

где T_x и T_y — матрицы преобразования базисов, I_r — единичная матрица

размера $r \times r$, $r = \text{rank } A$,
$$A' = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}.$$

Центральную матрицу в правой части принято называть матрицей в канонических базисах. Для рассмотренного случая (3) характерно наличие обоих делителей нуля, которые в исходных базисах можно записать в виде

$$\bar{A}^L = \begin{bmatrix} 0_{(m-r) \times r} & I_{m-r} \end{bmatrix} T_y, \quad \bar{A}^R = T_x^{-1} \begin{bmatrix} 0_{r \times (n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Планшетный способ формирования делителей нуля произвольной матрицы основан на использовании делителей нуля в канонических базисах.

Для нахождения искомым делителей нуля матрица A дополняется двумя единичными матрицами слева и снизу так, что получается конструкция типа планшета (но формально она не является матрицей):

$$\left[\begin{array}{c|c} I_m & A_{m \times n} \\ \hline & I_n \end{array} \right]$$

На этой конструкции выполняются элементарные операции преобразования строк и столбцов матрицы A с одновременным преобразованием строк и столбцов прилегающих единичных матриц. Под элементарными операциями здесь понимается умножение строки (столбца) на число, смена местами двух строк (столбцов), добавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число. Цель преобразований заключается в приведении матрицы A к записи в канонических базисах (3). Тогда блоки первоначально единичных матриц напротив нулевых блоков матрицы A' будут содержать делители нуля полного ранга. Левее матрицы A' будет расположен левый делитель, а ниже — правый делитель, т. е. матричная конструкция–планшет принимает вид

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{r \times m}^L \\ \bar{A}_{(m-r) \times m}^L \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \\ \hline & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{n \times r}^R & \bar{A}_{n \times (n-r)}^R \end{bmatrix} \end{array} \right]. \quad (5)$$

Отсутствие нулевых строк и/или нулевых столбцов у матрицы A' будет соответствовать тому, что матрица A не имеет левых и/или правых делителей нуля.

Матрицы, стоящие слева и внизу конструкции (5), в качестве блоков содержат некоторые матрицы $\tilde{A}_{r \times m}^L$ и $\tilde{A}_{n \times r}^R$ максимального ранга, равного рангу r исходной матрицы A . Сравнительный анализ (3) и (5) показывает, что существуют следующие взаимозависимости:

$$T_y = \begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \bar{A}^L \end{bmatrix}, \quad T_x^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}^R & \bar{A}^R \end{bmatrix}.$$

Прямоугольные матрицы \tilde{A}^L и \tilde{A}^R ранга r , одновременное умножение на которые слева и справа по формуле $\tilde{A}_{r \times m}^L A_{m \times n} \tilde{A}_{n \times r}^R = I_r$, приводит прямоугольную матрицу A ранга r к единичной матрице I_r , принято называть соответственно *левым* и *правым канонизаторами*.

Матрицу размера $n \times m$, образованную для прямоугольной матрицы A размера $m \times n$ и ранга r произведением ее правого и левого канонизаторов по формуле $\tilde{A}_{n \times m} = \tilde{A}_{n \times r}^R \tilde{A}_{r \times m}^L$ принято называть *сводным канонизатором* матрицы A .

Таким образом, любой матрице A можно поставить в соответствие в тройку матриц, включающую левый \bar{A}^L и правый \bar{A}^R делители нуля, а также сводный канонизатор \tilde{A} , $A \rightarrow (\bar{A}^L, \tilde{A}, \bar{A}^R)$, причем эта тройка в общем случае неединственная.

Такая тройка матриц характеризует «внутреннюю структуру» матрицы A :

- все линейно зависимые комбинации строк — \bar{A}^L ;
- все линейно зависимые комбинации столбцов — \bar{A}^R ;
- совокупность линейно независимых комбинаций строк и столбцов — \tilde{A} .

Представление произвольной матрицы $A \rightarrow (\bar{A}^L, \tilde{A}, \bar{A}^R)$ принято называть *канонизацией* матрицы.

При решении матричных уравнений указанная тройка матриц значительно информативнее ранговых критериев (Кронекера — Капели и т. д.).

Пример применения процедуры Canonize

Рассмотрим применение разработанной функции для решения матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 26 \\ 78 \\ 52 \\ 26 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Доказано [5], что такое уравнение имеет решение только при выполнении условия $\bar{A}^L B = 0$ (условие разрешимости левостороннего матричного уравнения). Класс решений матричного уравнения описывается соотношением

$$\langle X \rangle_\mu = \tilde{A} B + \bar{A}^R \mu,$$

где μ — произвольная (числовая или полиномиальная) матрица подходящего размера (в данном случае размера 2×1).

Применение функции **Canonize** (A) дает следующие результаты.

$$\begin{aligned}\bar{A}^L &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \bar{A}^R &= \begin{bmatrix} -2 & -1.3636 \\ 1 & 0 \\ 0 & -0.81818 \\ 0 & 1.2727 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}^L &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.54545 & -0.18182 & 0 & 0 & -0.090909 \end{bmatrix}, & \tilde{A}^R &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -0.22727 & 0.40909 & 0 & 0 & -0.54545 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.13636 & 0.045455 & 0 & 0 & 0.27273 \\ 0.54545 & -0.18182 & 0 & 0 & -0.090909 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Тогда решение уравнения принимает вид:

$$\begin{aligned}\langle X \rangle_\mu = \tilde{A}B + \bar{A}^R \mu &= \begin{bmatrix} -0.22727 & 0.40909 & 0 & 0 & -0.54545 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.13636 & 0.045455 & 0 & 0 & 0.27273 \\ 0.54545 & -0.18182 & 0 & 0 & -0.090909 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 78 \\ 52 \\ 26 \\ 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1.3636 \\ 1 & 0 \\ 0 & -0.81818 \\ 0 & 1.2727 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 11.818 \\ 0 \\ 7.0909 \\ -2.3636 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\mu_1 - 1.3636\mu_2 \\ \mu_2 \\ -0.81818\mu_2 \\ 1.2727\mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Непосредственно подстановкой легко проверить, что при любых значениях μ_1 и μ_2 полученное решение удовлетворяет исходному матричному уравнению.

Заключение

Разработанный программный модуль позволяет в автоматизированном режиме осуществлять канонизацию матриц произвольного размера, что позволяет формировать весь класс решений матричных уравнений. Программный модуль может оказать существенную помощь при решении

задач анализа и синтеза систем управления с использованием технологии вложения систем.

Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления. В 3-х т. Т.2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н. Д. Егупова.— М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.— 736 с.
2. Буков В. М., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В. Основы технологии вложения систем // Труды III международной науч. конф. «Идентификация систем и задачи управления».— М.: ИПУ РАН, 2004.— С.92–111 (CD ISBN 5-201-14966-9).
3. Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю. Синтез системы управления многосвязного объекта на основе технологии вложения // Автоматика и телемеханика.— 2002.— №8.— С.22–36.
4. Асанов А.З. Аналитический синтез закона управления линейной динамической системой методом вложения // Мехатроника, автоматизация, управление.— 2003.— №2.— С.15–21.
5. Буков В. М., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского университета. Серия: Физико-математические науки. Вып.1.— 2002. — С.19–28.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.— М.: Мир, 1989.— 655 с.

Приложение 1.

Программная реализация планшетного способа канонизации

Листинг программы _функции.

```
function [al_ar_al,ar,ac] = canonize(a);
%CANONIZE - канонизация матриц
% [al_ar_al,ar,ac] = CANONIZE(a) - канонизация матрицы а планшетным способом,
% результатом выполнения являются матрицы:
% правый делитель нуля ar_; левый делитель нуля al_;
% правый канонизатор ar; левый канонизатор al; сводный канонизатор ac.
% Результатом вычислений каких-либо из указанных матриц могут быть пустые матрицы
try
    rnk = double(rank(a));
catch
    warning('Не удалось вычислить ранг заданной матрицы. Ранг будет принят равным наименьшему размеру матрицы')
    rnk = min(size(a));
end

if rnk == 0
    error('Матрица имеет нулевой ранг');
end

% установка соотношения размеров матрицы и ее ранга
if isequal(size(a,1), size(a,2), rnk)
    rflag = 0; % матрица полная
elseif (rnk == size(a,1)) & (size(a,1) < size(a,2))
    rflag = 1; % матрица полного строчного ранга (ранг = числу строк)
```

```

a=a';
elseif (rnk == size(a,2)) & (size(a,1) > size(a,2))
    rflag = 2; % матрица полного столбцового ранга (ранг = числу столбцов)
elseif rnk < min(size(a))
    rflag = 3; % ранг матрицы меньше минимального размера
end

%-----
% инициализация дополнений к матрице a в виде единичных матриц b и c(слева и снизу)
b = eye(size(a,1));
c = eye(size(a,2));

% поиск нулевых строк и перемещение их "в низ" матрицы
% zr - число нулевых строк;
if rflag ~= 0 & rflag ~= 1
    [a,b,zr] = zerostrfind(a,b);
end

% поиск нулевых столбцов и перемещение их в "правый край" матрицы
% zc - число нулевых столбцов
if rflag ~= 0 & rflag ~= 2
    [a,c,zc] = zerostrfind(a',c');
    a=a';
    c=c';
end

%=====
% преобразование матриц в символьное представление
if ~isnumeric(a)
    b = sym(b);
    c = sym(c);
end
%=====
zr = 0;
zc = 0;
% приведение матрицы к верхнему треугольному виду (a(i,j)=0, i>j)
for l = 1:min(size(a)-[zr zc])
    if (a(l,l) == 0) % если ведущий элемент равен нулю
        % поиск первого ненулевого элемента в l-том столбце и определение номера строки m, в к-ром он найден
        m = find(a(l+1:size(a,1),l) ~= 0)+l;
        % если ненулевой элемент в l-том столбце ниже ведущего элемента не найден...
        if isempty(m)
            % .. то он ищется в l-той строке правее ведущего элемента
            m = find(a(l,l+1:size(a,2)) ~= 0)+l;
            % если найден, то l-тый и m-тый столбцы матриц a и c меняются местами
            if ~isempty(m)
                m = m(1);
                a = rcintrchange(a,l,m,'c');
                c = rcintrchange(c,l,m,'c');
            else
                % иначе отсортровка нулевых строк
                rows = l:size(a,1)-zr;
                [a_,b_,m]=zerostrfind(a(rows,l:size(a,2)-zc),b(rows,:));
                a(rows,l:size(a,2)-zc) = a_;
                b(rows,:) = b_;
                zr = zr + m;
                % если все оставшиеся строки - нулевые, то переход к следующему этапу
                if m == length(rows)
                    break
                else
                    % иначе поиск ненулевых элементов в l-той строке и перемена местами l-того и m-того столбцов
                    m = find(a(l,l+1:size(a,2)-zc) ~= 0)+l;
                    m = m(1);
                    a = rcintrchange(a,l,m,'c');
                    c = rcintrchange(c,l,m,'c');
                end
            end
        end
    end
end
end

```

```

else
    %      если ненулевой элемент был найден в l-том столбце ниже ведущего элемента
    m = m(1);
    a = rcintrchange(a,l,m);
    b = rcintrchange(b,l,m);
end
end

%      процедура исключения
k = l+1:size(a,1)-zr;
if ~isempty(k)
    tmp = a(k,l)/a(l,l);
    a(k,l:size(a,2)-zc) = a(k,l:size(a,2)-zc)-tmp*a(l,l:size(a,2)-zc);
    b(k,:) = b(k,:)-tmp*b(l,:);
end
end

%      приведение матрицы к диагональному виду (a(i,j)<>0, i=j; a(i,j)=0, i<>j, i,j<=rank(a))
for l = 1:min(size(a)-[zr zc])
    k = l+1:size(a,2)-zc;
    tmp = (a(l,k)/a(l,l));
    a(:,k) = a(:,k)-a(:,l)*tmp;
    c(:,k) = c(:,k)-c(:,l)*tmp;
end

%      все элементы вдоль главной диагонали = 1
l = 1:min(size(a)-[zr zc]);
tmp = a(l,l)^-1;
a(l,l) = eye(length(l));
b(l,:) = tmp*b(l,:);

%=====
%      преобразование матрицы обратно в числовое представление (если возможно)
try
    a = double(a);
    b = double(b);
    c = double(c);
catch
    disp('Матрица не является числовой');
end
%=====

%      если rflag = 1, то матрицы b и c взаимно меняем местами и транспонируем
if rflag == 1
    tmp = c;
    c = b';
    b = tmp';
end

%      построение выходных матриц
al = b(1:rnk,:);
al_ = b(rnk+1:size(b,1),:);
ar = c(:,1:rnk);
ar_ = c(:,rnk+1:size(c,2));

ac = ar*al;

function [x,y,num]=zerostrfind(q,s);
%      zerostrfind поиск нулевых строк в матрице q и перестановка их "вниз" матрицы;
%      соответствующие перестановки проводятся и с матрицей s
%      количество строк матриц q и s должно совпадать
%      x и y - получаемые после перестановок строк матрицы, num - количество найденных нулевых строк
%
d = size(q,1);
%      k - вектор-столбец, содержащий номера НЕнулевых строк матрицы q
k = find(~all(q' == 0)');
%      num - количество нулевых строк матрицы q

```

```
num = d-length(k);  
if ~isempty(k)  
    %           нулевые строки переставляются "вниз" матрицы q  
    x = [q(k,:); zeros(num, size(q,2))];  
    %           строки матрицы s, соответствующие нулевым строкам матрицы q, переставляются "вниз"  
    s_ = s;  
    s_(k,:) = [];  
    y = [s(k,:); s_];  
else  
    x = q;  
    y = s;  
end
```


УДК 62-50

О СИНТЕЗЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВО МНГОВХОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ В СРЕДЕ MATLAB

Асмыкович И. К., Овсянников А. В.

*Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь,
e-mail; aik@bstu.unibel.by*

Задача модального управления (управления спектром) является одной из основных задач в качественной теории управления линейными динамическими системами. Ее суть состоит в выяснении возможности с помощью линейной обратной связи обеспечить произвольный спектр в замкнутой системе. Частным случаем этой задачи является задача стабилизации, т. е. когда для непрерывной системы необходимо обеспечить весь спектр в левой полуплоскости, а для линейной дискретной системы в единичном круге. Математически строго задача модального управления для обыкновенных многовходных линейных систем с полной информацией была сформулирована и решена в работе [14] в 1967 году. В ней было доказано, что критерием разрешимости этой задачи является полная управляемость рассматриваемой системы, т. е. выполнение критерия Калмана [1,7,8]. Реальное нахождение коэффициентов регулятора, обеспечивающего требуемое распределение спектра, встречается с большим числом вычислительных трудностей, связанных, частично с тем, что непосредственный расчет требует решения нелинейной системы уравнений.

В классической теории управления эта задача была полностью проанализирована и решена для одновходных систем [1]. В пространстве состояний также для нее алгоритм существенно проще, так как в этом случае полная управляемость означает невырожденность матрицы управляемости [8] и возможность сведения системы к дифференциальному уравнению n -го порядка. На этой основе разработана формула Аккермана, [2,5] по которой в среде MATLAB находят коэффициенты модального регулятора и которая усовершенствована в работе [10]. Основным элементом в этом случае является цикличность [7,8] пространства состояний системы относительно вектора входа.

Для многовходных систем ситуация значительно сложнее. Если матрица системы является цикличной, т. е. система может быть управляема одним входом, то тогда задачу сразу сводят к одновходной задаче [1] и используют стандартные алгоритмы [1,10]. Но если матрица системы не является матрицей простой структуры, то это невозможно.

Оригинальное доказательство возможности модального управления опирается на лемму о возможности с помощью линейной обратной связи приведения исходной системы к системе управляемой одним входом. Эта лемма впервые была доказана в [14] и много раз повторена в других работах (подробности см. в [8]). Она позволяет расчет модального регулятора для многовходной системы свести к расчету регулятора для одновходной системы. Но при этом существенно ограничивается свобода выбора коэффициентов регулятора, так как матрица обратной связи будет иметь единичный ранг, кстати, так же как и при непосредственном сведении к одновходной системе. Уменьшение количества свободных коэффициентов в матрице обратной связи приводит к потере возможности параллельного решения других задач, например, задач реконструкции, или расщепимости [8]. Этого недостатка можно избежать, если использовать приведение многовходной управляемой системы к канонической форме Бруновского [8].

Задача управления спектром существенно усложняется, если учитывать неполноту информации в реальных системах, т. е. рассматривать обратную связь по выходу. Оказывается, что при этом можно точно распределить только часть собственных чисел для одновходных систем, а для многовходных систем получены различные достаточные условия возможности полного модального управления [11, 12]. Для реального расчета статических регуляторов используют методы оптимизации [2], методы линейной алгебры [10–12], линейные матричные неравенства и пространство переходных функций [13]. Так все алгоритмы используют достаточные условия существования регулятора, то их применение к конкретным системам не гарантирует хорошего результата, что показано на примере в [2]. Но, как отмечено в [12], эта задача еще далека от полного решения. Укажем, что если система полностью управляема и полностью наблюдаема, то, используя, либо наблюдатели, либо динамические регуляторы можно обеспечить произвольный наперед заданный спектр в замкнутой системе, но соответствующие регуляторы будут иметь достаточно сложную структуру [8]. Задачи модального управления рассматриваются и для более сложных классов систем, в частности, для систем с отклоняющимся аргументом [9], дескрипторных систем [6], гибридных систем [15], где изменяется как постановка задачи, так и вид регуляторов. Так как все алгоритмы требуют большое число матричных операций, то их выгодно реализовывать в среде MATLAB [2–6, 13, 15].

В докладе получен алгоритм расчета модального регулятора единичного и полного ранга в среде MATLAB, приведены численные примеры, описана алгоритмическая возможность получения канонических форм Бруновского и Луенбергера для полностью управляемых систем и рассмотрена задача стабилизации для линейных систем с полной информацией.

Расчет модального регулятора единичного ранга

Пусть имеется обыкновенная линейная управляемая система со многими входами

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор состояния, u — r -мерный вектор управления, A и B — постоянные матрицы соответствующих размеров, определяющие структуру объекта управления и входного устройства. Матрица B считается матрицей полного ранга, т. е. $\text{rank} B = r$, в противном случае имеются лишние управления. Будем рассматривать замыкание системы (1) линейным регулятором

$$u(t) = Qx(t). \quad (2)$$

Так как собственные числа, принадлежащие неуправляемой части, инвариантны относительно обратной связи (2), то система предполагается полностью управляемой по Калману, т. е. матрица управляемости имеет полный ранг, или

$$\text{rank} P = \text{rank}[B : AB : A^2B : \dots : A^{n-r}B] = n. \quad (3)$$

Определение 1. Система (1) называется модально управляемой (управляемой спектром) с помощью регулятора (2) если для любого наперед заданного согласованного набора комплексных чисел $\Lambda^* = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ существует $r \times n$ матрица Q такая, что спектр замкнутой системы (1), (2), т. е. набор собственных чисел матрицы $A + BQ$ совпадает со множеством Λ^* .

Как отмечалось выше, для разрешимости задачи модального управления необходимо и достаточно выполнения условия (3). Реальный расчет регулятора (2) требует формулировки задачи управления спектром как задачи управления коэффициентами характеристического полинома и приведения системы к канонической управляемой форме [10-12]. Это легко выполняется для одноходовой системы [10] и для системы с матрицей простой структуры. В последнем случае доказано [8], что такая система управляема одним входом, причем входной вектор может быть взят из линейной оболочки столбцов матрицы B .

Расчет обратной связи в этом случае выполняем по следующему алгоритму:

1. Находим матрицу управляемости P и проверяем условие (3).
2. Проверяем, является ли матрица системы A циклической.
3. Если да, то находим $\tilde{b} \in L(B)$, для которого выполняется условие (3).
4. Для полученной одноходовой системы находим коэффициенты регулятора, обеспечивающего требуемый спектр в виде $u(t) = q'x(t)$.
5. Окончательно получаем матрицу $Q = l \times q'$ единичного ранга.

Для реализации указанного алгоритма можно воспользоваться встроенными функциями пакета Control System Toolbox системы MATLAB.

1. В частности, для нахождения матрицы управляемости можно воспользоваться функцией `ctrb`, которая формирует матрицу управляемости для модели в пространстве состояний $\text{ctrb}(A,B)$. Условие (3) проверяем с помощью функции $\text{rank}(\text{ctrb}(A,B))$.
2. Проверка цикличности матрицы A осуществляется по следующим этапам.
 - Находим с помощью функции $\text{eig}(A)$ вектор собственных значений матрицы A . Если собственные числа различны между собой то матрица A циклическая.
 - Если в результате выполнения этапа 1 некоторые из собственных чисел оказываются кратными определяем Жорданову каноническую форму для матрицы A с помощью функции $\text{jordan}(A)$.
 - Если в ней все блоки одномерны то матрица A циклическая.
 - В противном случае матрица A не является матрицей простой структуры.
3. Создаем вектор $\tilde{b} \in L(B)$ как линейную комбинацию столбцов матрицы B с достаточно простыми коэффициентами, которые обозначим как вектор l и как в пункте 1 проверяем условие полной управляемости. Если оно не выполняется, то изменяем любой из коэффициентов линейной комбинации и вновь проверяем условие (3).
4. Для системы (A, \tilde{b}) находим коэффициенты модального регулятора с помощью команды $\text{acker}(A, \tilde{b}, p)$, или, как предложено в [5], команды `place`.
5. Применяя матричное умножение получаем требуемый регулятор $u(t) = Qx(t)$, где $Q = l \times q'$.

Если матрица системы не является циклической, то система не может быть управляемой одним входом, и предыдущий алгоритм не применим. Но доказано [14], что при выполнении условия (3) почти любая обратная связь приводит к циклической матрице, т. е. применив регулятор $u(t) = Q_1 x(t) + v(t)$ можно решать задачу модального управления по выше приведенному алгоритму. При этом окончательный регулятор будет иметь вид $Q = Q_1 + l \times q'$. В данном случае мы имеем свободу в выборе матрицы Q_1 , за счет которой можно оптимизировать в каком-то смысле модальный регулятор, хотя это можно сделать только используя различные алгоритмы прямого перебора.

Расчет модального регулятора полного ранга

Для многовходных управляемых систем аналогом канонической управляемой формы является каноническая форма Бруновского, которая имеет блочный вид и строится при помощи выбора линейно независимых векторов из матрицы управляемости P . Этот выбор можно проводить дву-

мя способами и, соответственно, получать две канонические формы. Первый алгоритм предложен Луенбергером (подробности см. в [8]) и состоит в следующем.

Пусть матрица B в системе (1) состоит из векторов b_1, b_2, \dots, b_r . Эти векторы полагаются линейно независимыми, т. е. матрица входов имеет полный ранг. Для вектора b_1 находим максимальное число k_1 линейно независимых векторов в цепочке $b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{k_1-1}b_1$. Далее рассматриваем цепочку $b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2, \dots, A^{k_2-1}b_2$ и находим максимальное k_2 , при котором эти векторы линейно независимы. Таким образом, выделим из матрицы управляемости P набор n линейно независимых векторов в виде

$$L = [b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2, \dots, A^{k_2-1}b_2, \dots, b_r, Ab_r, A^2b_r, \dots, A^{k_r-1}b_r]. \quad (4)$$

Для создания матрицы преобразования L в системе MATLAB может быть использована циклическая процедура в процессе выполнения которой происходит дополнение матрицы вектор — столбцов вида $A^i b_j$ до получения невырожденной матрицы.

Далее, выполнив в системе (1) замену переменной $z(t) = Dx(t)$, что можно сделать с помощью встроенной функции SS2SS, мы приведем ее к канонической форме Луенбергера, которая имеет следующий вид матричной пары (\tilde{A}, \tilde{B}) , где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_0^r \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_1^r \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_2^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n_1-1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n_1-1}^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n_1-1}^r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n_1}^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n_1}^r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & -\alpha_{n_1+1}^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n_1+1}^r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & -\alpha_{n_1+2}^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n_1+2}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n_1+n_2-1}^2 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_{n_1+n_2-1}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n+n_r}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n+n_r+1}^r \\ & & & & & & & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n+n_r+2}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1}^r \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} n_1 \\ n_2 \\ n_r \end{array} \right.$$

Аналогичная процедура для системы с одним входом реализуется с помощью встроенной функции **CANON**.

Но для задач модального управления и для задач реконструкции более удобной является каноническая форма Бруновского, которая получается следующим образом. Из матрицы управляемости P вначале выбирают векторы b_1, b_2, \dots, b_r , затем линейно независимые по их модулю из векторов Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_r , далее из векторов $A^2b_1, A^2b_2, \dots, A^2b_r$ и так до тех пор, пока не получим набор из n линейно независимых векторов в виде

$$D = [b_1, Ab_1, A^2b_1, \dots, A^{n_1-1}b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2, \dots, A^{n_2-1}b_2, \dots, b_r, Ab_r, A^2b_r, \dots, A^{n_r-1}b_r], \quad (5)$$

где числа n_1, n_2, \dots, n_r индексы Кронеккера [8] матричной пары A, B . Для этих чисел будем полагать, что они расположены в порядке убывания, т. е.

$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$, причем возможно, что некоторые индексы Кронеккера равны единице. Если это не выполняется для исходной матрицы B , то выполняем перенумерацию входов. По матрице D строим матрицу преобразования T в форме

$$T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{n_1} \ t_{n_1+1} \ \dots \ t_{n_1+n_2} \ t_{n_1+n_2+1} \ \dots \ t_{n-1} \ t_n]$$

где $t_n = b_r$, $t_{n_1+n_2} = b_2$, $t_{n_1} = b_1$, а остальные векторы матрицы T есть линейные комбинации векторов матрицы D из (5). Выполнив в исходной системе переход к базису T , т. е. преобразование $z = Tx$, получим матрицы системы в виде

$$A^c = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & A_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & \dots & \dots & A_{rr} \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_r \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{ij1} & \dots & \dots & \beta_{ijn_j} \end{bmatrix},$$

$$i \neq j, \quad A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ \beta_{ii1} & \dots & \dots & \beta_{iini} \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{j1} & \dots & \gamma_{jj} & \gamma_{jj+1} & \dots & \gamma_{jr} \end{bmatrix}$$

При такой структуре матриц расчет модального регулятора проводится непосредственно путем приравнивания коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы и желаемого характеристического полинома. Кроме того можно в замкнутой системе изменять число инвариантных многочленов, решая тем самым задачу реконструкции, а для системы с выходом рассматривать задачу расщепимости [8].

Для решения задачи стабилизации для полностью управляемой системы достаточно в качестве желаемого характеристического полинома задать устойчивый полином и решить соответствующую задачу модального управления. Для не полностью управляемой системы, с помощью замены базиса в пространстве состояний можно выделить управляемую и неуправляемую части и если неуправляемая часть устойчива, т. е. ее собственные числа лежат в левой части комплексной плоскости, то стабилизировать управляемую часть. Можно также рассматривать обратную связь по выходу, используя разбиение пространства состояний системы на четыре подпространства, т. е. приведение системы (1) с выходом $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ к виду [8]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} + Du. \quad (6)$$

При этом можно использовать команды **SS2SS**, **CANON**, **CTRBF**, **OBSVF**, которые позволяют переходить отдельно к канонической управляемой форме и канонической наблюдаемой форме. Структура системы (6) позволяет сделать вывод, что обратной связью по выходу можно изменять только собственные числа, принадлежащие полностью управляемой и полностью наблюдаемой части.

Как отмечалось выше, задачи управления спектром для систем с последствием и дескрипторных систем требуют большого объема матричных операций и поэтому их удобно решать в среде MATLAB, но для этого необходимо разрабатывать конкретные программы.

Литература

1. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства.— М.: Машиностроение, 1976.— 184 с.

2. Дьяконов В. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя.— М.: СОЛОН-Пресс, 2003.— 576 с.
3. Говорухин В. Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс.— СПб.: Питер, 2001.
4. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование MATLAB.— М.: Изд. дом «Вильямс» 2001.— 720с.
5. Медведев В. С., Потемкин В. Г. Control Systems Toolbox. MATLAB для студентов.— М.: Диалог-МИФИ, 1999.
6. Varga A. A descriptor systems toolbox for MATLAB // Proc. CACSD 2000 Symposium.— Anchorage, Atlanta, 2000
7. Летов А. М. Математическая теория процессов управления.— М.: Наука, 1981.— 256с.
8. Асмыкович И. К., Габасов Р., Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Задачи управления конечномерными системами // Автоматика и телемеханика.— 1986.— №11.— С.5–29.
9. Асмыкович И. К., Овсянников А. В. Расчет динамических систем управления с запаздыванием в среде MATLAB // Труды Всероссийской науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB» (28–29 мая 2002, Москва).— М.: ИПУ РАН, 2002.— С.355–364.
10. Толочко О. И., Федоряк Р. В. Автоматизация синтеза регуляторов и наблюдателей в среде пакета MATLAB // Труды Всероссийской науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB» (28–29 мая 2002, Москва).— М.: ИПУ РАН, 2002.— С.482–496.
11. Syrmos V. I., Ahdallah C. I., Dorato P. and Grigoriadis K. Static output feedback — A survey // Automatica.— V.33.— 1997.— P.125–137.
12. Kimura H. Pole assignment by output feedback: A longstanding open problem // Proc. of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, FL, 1994.— P.2101–2105.
13. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.— 616с.
14. Wonham W. M. On pole-assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Autom. Control.— V.AC-12.— N6.— 1967.— P.660–667.
15. Taylor J. E., Kebede D. Modeling and simulation of hybrid systems in MATLAB // Proc. 13th Triennial Word Congress IFAC.— San Francisco, USA, 1996.— Vol.D.— P.275–280.

УДК 510:681.3

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Афонин В. В., Мурюмин С. М.

*Мордовский государственный университет, Саранск,
e-mail: afoninvv@freemail.mrsu.ru*

В работе рассматривается синтез программного управления для линейных стационарных объектов на основе решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Понимая под синтезом программного управления по быстродействию определение моментов переключения максимального допустимого управления, традиционно задача сводится к решению алгебраических нелинейных систем. Как известно, методы решения сложны и не всегда разрешимы на множестве действительных чисел. В работе в предположении существования положительных решений предлагается определять моменты переключения управляющего воздействия как стационарное решение систем нелинейных дифференциальных уравнений. В работе применен метод решения жестких систем дифференциальных уравнений, реализованный через встроенные функции среды MATLAB. Результаты численного моделирования показали высокую эффективность для задач до 5-го порядка включительно. Модели объектов порядка выше 5-го (или 4-го) обычно содержат малые постоянные времени, которыми в практических приложениях пренебрегают. В данной работе модели объектов высоких порядков заменяют моделью 5-го порядка с последующим приложением синтезированного управляющего воздействия к исходной модели высокого порядка. Предполагается, что рассматриваемые объекты являются инерционными, т. е. такими, для которых корни характеристического уравнения есть отрицательные действительные числа.

1. Постановка задачи

Полагаем, что рассматриваемые объекты управления являются объектами SISO, т. е. с одним входом и одним выходом. Математическая модель таких объектов представляется либо дифференциальным уравнением высокого порядка вида

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_m u(t), \quad (1.1)$$

либо системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + Bu(t), \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cz(t), \quad (1.3)$$

где a_i , $i = \overline{0, n-1}$, b_m — постоянные коэффициенты, A, B, C — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, соответственно, $y(t)$ — выход системы (1.2), который соответствует $x(t)$ уравнения (1.1).

Переход от (1.1) к (1.2) неоднозначен, но изменение во времени функции $x(t)$ как решения (1.1) и $y(t)$ в (1.3) можно сделать идентичным. Это будет выполняться в случае, когда корни характеристического уравнения (1.1) и собственные числа матрицы A в (1.2) одни и те же, и предположим, что они отрицательные действительные и различные. Характеристическое уравнение для поиска корней (собственных чисел) имеет вид:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0, \quad (1.4)$$

где a_i , $i = \overline{0, n-1}$, есть коэффициенты дифференциального уравнения (1.1).

В дальнейшем изложении будем рассматривать задачу, применительно к (1.1). В задаче об оптимальном по быстродействию управлении требуется перевести объект (систему) из одного состояния в другое при допустимом управлении за минимальное время. Контроль состояния осуществляется за координатой $x(t)$ в (1.1). Считаем граничные условия по всем необходимым координатам или переменным состояния заданы, причем принимаем, что

$$x(0) = 0, \quad x(T) = x_n > 0, \quad (1.5)$$

где T — искомое минимальное время перевода.

На управление накладывается двухстороннее симметричное ограничение:

$$|u(t)| \leq U_m, \quad (1.6)$$

где U_m — максимально допустимое управляющее воздействие.

2. Предпосылки решения задачи линейного быстродействия

Оптимальное управление для сформулированной задачи может быть найдено на основе принципа максимума. Как известно, в случае линейной задачи оптимального управления принцип максимума представляет собой не только необходимое, но и достаточное условие оптимальности, если выполняется так называемое условие общности положения. Для линейных стационарных систем условие общности положения совпадает с условием управляемости по Калману, когда для полной управляемости системы вида (1.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n, \quad (2.1)$$

где n — размерность системы (1.2).

Для сформулированной задачи быстрогодействия целесообразно применить теорему об n интервалах в соответствии с которой оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию, которая принимает значения $\pm U_m$, имеет не более $n-1$ переключений, т. е. не более n интервалов знакопостоянства максимального управления U_m , где n — порядок системы (1.2) или порядок дифференциального уравнения (1.1). Можно также показать, что условие (2.1) для сформулированной задачи всегда выполняется. Поэтому с точки зрения синтеза программного оптимального управления требуется определить конкретное число интервалов в зависимости от граничных условий и моменты переключения с $+U_m$ на $-U_m$. При этом для граничных условий (1.5) знак первого интервала будет положительным [1].

Для определения моментов переключения t_1, t_2, \dots, t_n можно применить метод стыкования решений дифференциального уравнения со знакопеременной правой частью. В результате будет получена система нелинейных (трансцендентных) уравнений вида [1]:

$$\left(1 + (-1)^n \frac{a_0 x_n}{b_m U_m}\right) e^{-\alpha_i t_n} + (-1)^n 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-\alpha_i t_k} + (-1)^n = 0; \quad (2.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где n — порядок системы, α_i — корни характеристического уравнения (1.4). Отношение b_m/a_0 представляет собой коэффициент усиления объекта, который обозначим через K . Ясно, что начиная с $n=2$, система может быть решена только численными методами решения нелинейных алгебраических уравнений (случай $n=1$ можно считать тривиальным и в последующем не рассматривается). Как правило, для решения систем вида (2.2) необходимо задавать начальную область поиска. Например, в MATLAB для решения нелинейных систем уравнений может применяться функция **fsolve**, вторым входным параметром которой как раз является начальный вектор поиска. В случае применения функции **solve**, для которой не требуется начальный вектор поиска, могут возникать проблемы с решением для задач 2-го порядка, не говоря уже о более высоких порядках, когда корни характеристического уравнения имеют значительный разброс. Задача конечно упрощается, если предполагаемое решение локализовано в достаточно узкой области. Эти области часто определяют из известных практических соображений. Но даже при «хорошей» области начального поиска, как показывают результаты моделирования, решение не может быть получено при значительном разбросе значений корней характеристического уравнения. Кроме того, в силу необходимости задания для **fsolve** начального вектора поиска, результаты могут получаться также разным В этой связи в данной работе дается описание эвристического метода решения задачи

быстродействия, которая в описанной постановке является задачей вычислительной математики. Может быть, первое упоминание об этом методе было дано в [2]. В соответствии с этим эвристическим методом проблема решения нелинейных алгебраических уравнений заменяется проблемой решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений без поиска «наилучших» начальных приближений.

3. Эвристический метод решения линейной задачи быстродействия

Суть предлагаемого эвристического метода решения задачи быстродействия заключается в том, что алгебраическая нелинейная система (2.2) заменяется на систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dt_j}{dt} = (-1)^n \left[\left(1 + (-1)^n \frac{a_0 x_n}{b_m U_m} \right) e^{-\alpha_i t_n} + (-1)^n 2 \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k e^{-\alpha_i t_k} + (-1)^n \right]; \quad (3.1)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n},$$

где $t_j, j = \overline{1, n}$ — функция независимого аргумента t для j -го момента переключения искомого оптимального по быстродействию управления.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.1) проводится при нулевых начальных условиях, т. е. при $t_j(0) = 0, j = \overline{1, n}$.

Установившееся решение системы дифференциальных уравнений (3.1) принимается как решение алгебраической системы уравнений (2.2). В соответствии с теорией оптимального по быстродействию управления линейными объектами [3] можно утверждать, что сформулированная задача быстродействия имеет решение или не имеет решения алгебраическая система уравнений (2.2). Другое дело, что вычислительные методы не всегда позволяют найти это решение. То же самое можно сказать и о проблемах, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений (3.1). Но как показывают результаты моделирования система (3.1) как правило стремится к своему стационарному состоянию, т. е. практически выходит на установившийся режим. По мнению авторов возможность достижения установившегося режима зависит главным образом от того численного метода, с помощью которого осуществляется интегрирование системы дифференциальных уравнений (3.1). Анализ показывает, что целесообразно применять методы интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений. Например, в среде MATLAB это можно сделать на основе решателя **ode15s**. Во всяком случае этот решатель оказался наиболее предпочтительным при интегрировании систем вида (3.1). Для инженерных практических приложений авторами была разработана программа в MATLAB, с помощью которой можно осуществлять синтез программного управления, оптимального по быстродействию.

Следует заметить, что при использовании вычислительных программ необходимо производить масштабирование входных данных и получаемых результатов (при «больших» или «малых» значениях постоянных времени их следует уменьшить (увеличить) в какое-то кратное число раз).

Моделирующий алгоритм, заложенный в программу исследования, заключается в следующем.

- 1) Задаются параметры задачи:
 - постоянные времени аperiodических звеньев 1-го порядка T_1, T_2, \dots ,
 - коэффициент усиления K ,
 - максимально допустимое управление U_m (см. 1.6),
 - желаемое значение выходной координаты объекта x_p (см. 1.5).
- 2) Задаются параметры интегрирования системы (3.1)
 - Интервал интегрирования (достаточно большой),
 - Нулевой начальный вектор состояния для системы (3.1), соответствующий числу вводимых постоянных времени исследуемого объекта или размерности матрицы состояния при описании (1.2),
- 3) Вычисляются установившиеся значения решений системы (3.1),
- 4) Сортируются по возрастанию установившиеся решения системы (3.1), которые принимаются за искомые моменты переключений t_1, t_2, \dots, t_n (в программе t_1, t_2, \dots, t_n),
- 5) Формируется исследуемая модель в виде произведения передаточных функций с заданными постоянными времени и коэффициентом усиления.
- 6) Преобразование модели к описанию в пространстве состояний.
- 7) К исследуемой модели объекта прикладывается релейное управление с моментами переключений t_1, t_2, \dots, t_n ,
- 8) Построение переходного процесса для исследуемой модели,
- 9) Вычисляется относительная погрешность выхода модели объекта в заданное состояние x_p .

Программа (скрипт-файл) анализа и синтеза программного управления, оптимального по быстродействию, приводится в приложении 1.

В качестве иллюстрации работы программы ниже приводятся результаты моделирования задачи быстродействия для объекта 5-го и 8-го порядков.

Для объекта 5-го порядка:

ПОСТОЯННЫЕ ВРЕМЕНИ:

$T_1 = 0.1$

$T_2 = 2$

$T_3 = 3$

$T_4 = 5$

$T_5 = 11$

КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ $K = 12$

ДОПУСТИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО МОДУЛЮ $U_m = 12$

ЛЕВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ $x(0) = 0$

ПРАВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ $x_n = 34$

ОБЪЕКТ 5-ГО ПОРЯДКА

МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ ОБЪЕКТА 5-ГО ПОРЯДКА:

$t_1=7.79462$

$t_2=11.63$

$t_3=14.9202$

$t_4=15.5839$

$t_5=15.68$

МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ

ОБЪЕКТА 5-го ПОРЯДКА: 110

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ: 0.0000%

Диаграммы изменения решений соответствующей системы (3.1) и переходного процесса приведены на рис. 1, рис. 2.

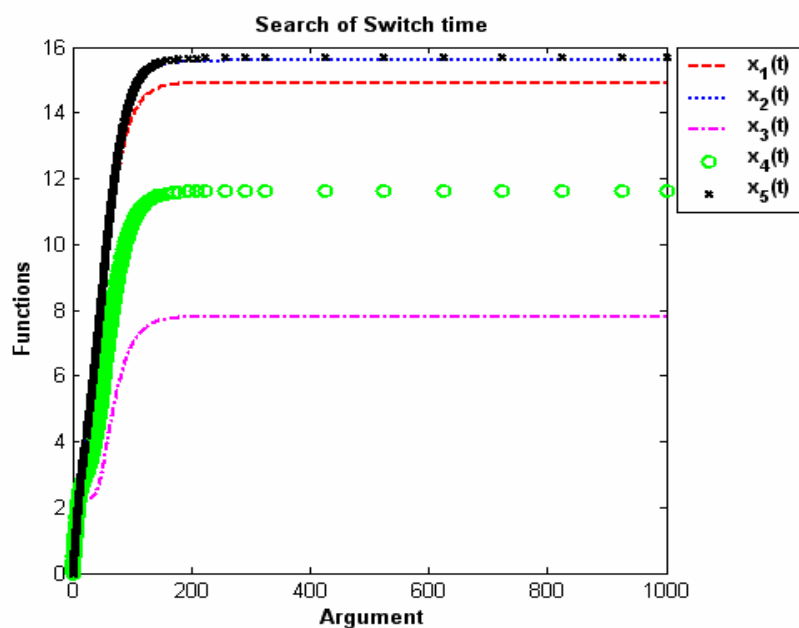


Рис. 1. Решение системы (3.1) для модели объекта 5-го порядка.

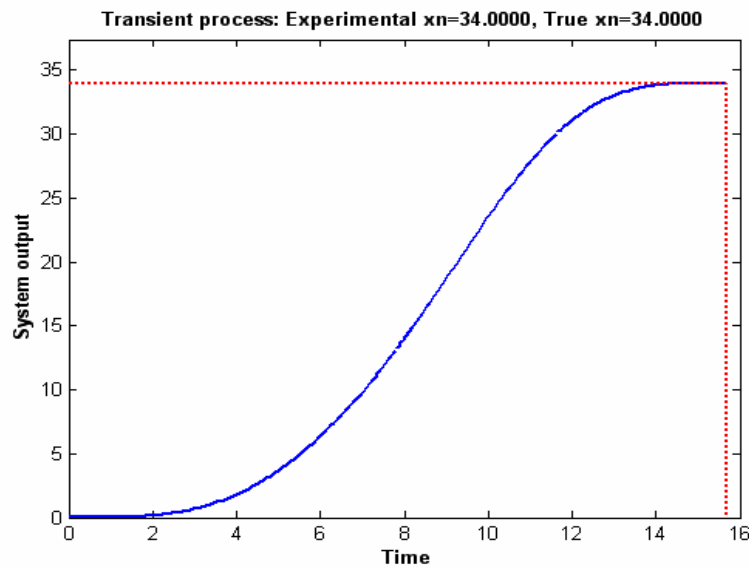


Рис. 2. Переходной процесс для модели объекта 5-го порядка.

Для объекта 9-го порядка предполагается, что постоянные времени 4-х звеньев являются на порядок меньше, чем остальные постоянные времени.

ПОСТОЯННЫЕ ВРЕМЕНИ:

$T_1 = 2$
 $T_2 = 3$
 $T_3 = 5$
 $T_4 = 12$
 $T_5 = 15$
 $T_6 = 0.1$
 $T_7 = 0.2$
 $T_8 = 0.24$
 $T_9 = 0.47$

КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ $K = 12$

ДОПУСТИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО МОДУЛЮ $U_m = 12$

ЛЕВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ $x(0) = 0$

ПРАВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ $x_n = 34$

ОБЪЕКТ 9-го ПОРЯДКА

МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ ОБЪЕКТА 5-ГО ПОРЯДКА:

$t_1 = 13.4609$
 $t_2 = 20.4276$
 $t_3 = 26.9095$
 $t_4 = 28.9508$
 $t_5 = 30.0244$

МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ ДЛЯ СОКРАЩЕННОЙ СИСТЕМЫ: 7.5

МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ: 150

ПОРЯДОК ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ: 9

ПОРЯДОК СОКРАЩЕННОЙ СИСТЕМЫ: 5

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ: 0.0074%

Диаграммы, визуализирующие решения соответствующей системы (3.1) и переходный процесс для исходной модели 9-го порядка, приведены на рис. 3, рис. 4.

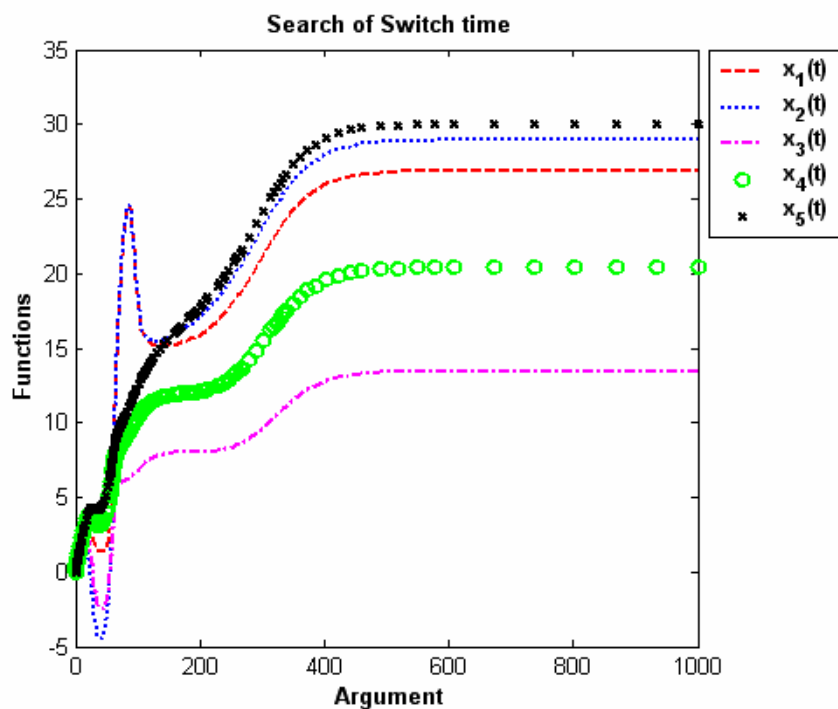


Рис. 3. Решение системы (3.1) для сокращенной модели 9-го порядка.

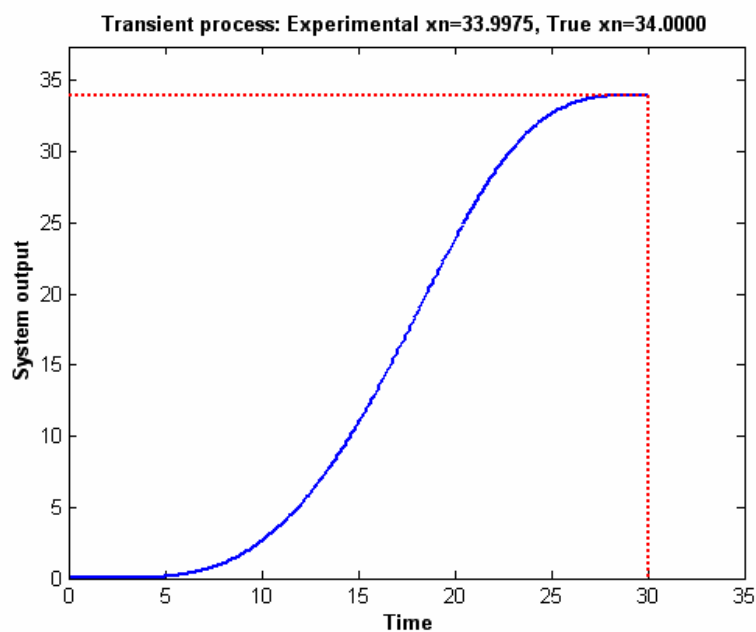


Рис. 4. Переходный процесс в модели объекта 9-го порядка.

Заключение

Предложенный эвристический метод синтеза программного управления в линейной задаче быстрогодействия с использованием встроенных функций системы MATLAB на взгляд авторов может эффективно применяться в инженерных расчетах. Естественно должны учитываться особенности решаемой задачи. Прежде всего это касается параметров объекта управления, т. е. постоянных времени и коэффициента усиления. В силу того, что правая часть дифференциальных уравнений (3.1) содержит положительные степени экспоненциальных функций, то очевидно, что при больших или малых значениях постоянных времени величина экспоненциальных функций может для компьютера представлять бесконечность или ноль. В этой связи необходимо производить разумное масштабирование, которое заключается в следующем. Если постоянные времени «очень велики», то их можно на кратную величину уменьшить. При этом следует предусмотреть увеличение на ту же кратную величину получаемых моментов переключения оптимального управления. И, соответственно, если постоянные времени «очень малы», то их можно на кратную величину увеличить, а затем уменьшить на ту же самую величину значения получаемых моментов переключения оптимального управления. Результаты моделирования, проведенные авторами, показали, что может быть следует изменять вводимые данные — постоянные времени на незначительную величину, чтобы не произошел срыв вычислительного процесса. Авторы пользовались готовыми встроенными функциями MATLAB. Может быть следует запрограммировать решение системы (3.1) по более современным методам численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Литература

1. Антомонов Ю. Г. Автоматическое управление с применением вычислительных машин.— Л.: Судпромгиз, 1962.— 340 с.
2. Афонин В.В. Об одном эвристическом подходе численного решения линейной задачи быстрогодействия //Электроника и информационные технологии—2003: Сб. науч. тр.— Саранск: Средневолжское математическое общество, 2003.— С.115–124.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1969.— 384 с.

Приложение 1

```
clear,close all
clc
h1=inputdlg('Input constants of time','Input K','Input Um','Input xn'),'fast_5',1,{'',' ',' ',' '});
nn=length(h1);
h11=ones(nn-1,1);
```

```

J=0;
for I=2:length(h1)
    J=J+1;
    h11(J,1)=str2num(char(h1(I,1)));
end
fprintf('\n\t ПОСТОЯННЫЕ ВРЕМЕНИ:\n')
rr=str2num(char(h1(1,1)));
for JJ=1:length(rr)
    fprintf('\t T%d = %g\n',JJ,rr(JJ))
end
%----- Election of the order -----
h2=1./str2num(char(h1(1,:)));
h22=sort(h2);
if length(h22)<=5
    hi=h22';
else
    p=0;
    hi=ones(5,1);
    for I=1:length(h22)
        p=p+1;
        hi(p)=min(h22);
        k1=find(h22==min(h22));
        h22(k1)=[];
        if p==5
            break
        end
    end
end
end
%-----
fprintf('\n')
global K Um xn
K=h11(1);
Um=h11(2);
xn=h11(3);
fprintf('\t КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ K = %g\n',K)
fprintf('\t ДОПУСТИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО МОДУЛЮ Um = %g\n',Um)
fprintf('\t ЛЕВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ x(0) = 0\n')
fprintf('\t ПРАВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ xn = %g\n',xn)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%----- 2 order -----
if length(hi)==2
    fprintf('\n\t ОБЪЕКТ 2-ГО ПОРЯДКА\n')
    hi=sort(-hi);
    global a1 a2
    a1=hi(1);
    a2=hi(2);
    T=[0 20000];
    x0=zeros(2,1);
    [t,x]=ode15s(@fast20,T,x0);
    %----- Switch time -----
    T1_N=sort([x(end,1),x(end,2)]);
    t1=T1_N(1);t2=T1_N(2);
    fprintf('\t МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ:\n')
    for I=1:2
        fprintf('\t t%d=%g\n',I,T1_N(I))
    end
    %----- Switch diagram -----
    figure(2),
    plot(t,x(:,1),'r--','linew',2),grid off,hold on,
    plot(t,x(:,2),'k-','linew',2)

```

```

set(gcf,'color','w'),
legend('\bf x_1(t)', '\bf x_2(t)', 5)
xlabel('\bf Argument'), ylabel('\bf Functions')
title('\bf Search of Switch time')
hold off
%----- Transient process -----
T1=1/a1; T2=1/a2;
s=tf('s');
w1=1/(T1*s+1);
w2=K/(T2*s+1);
W12=w1*w2;
s1=ss(W12);
global A B C D
[A,B,C,D]=ssdata(s1);
%----- 1-st interval -----
T=[0 t1];
x0=zeros(length(A),1);
[tt1,x]=ode45(@f_ast,T,x0);
DU=D*Um*ones(length(tt1),1);
y=x*C'+DU;
%----- 2-nd interval -----
TT=[t1 t2];
x02=x(end,:);
[tt2,x2]=ode45(@f_ast2,TT,x02);
DU2=-D*Um*ones(length(tt2),1);
y2=x2*C'+DU2;
fprintf('\t ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ: %g\n', max([T1 T2])/min([T1 T2]))
fprintf('\t ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ: %1.4f%%\n', abs(xn-y2(end))/xn*100, '%')
% ----- Diagram -----
figure(22),
plot(tt1,y,'linew',2), grid off, hold on,
plot(tt2,y2,'linew',2), line([0 t2 t2],[xn xn 0], 'linew',2, 'linestyle',':', 'color','r')
ylim([0 xn+0.1*xn])
title(['\bf', sprintf('Transient process: Experimental xn=%g, True xn=%g', y2(end), xn)])
set(gcf,'color','w')
xlabel('\bf Time'), ylabel('\bf System Output')
%%%%%%%%%%%%%%
%----- 3 order -----
elseif length(hi)==3
    fprintf('\n\t ОБЪЕКТ 3-ГО ПОРЯДКА\n')
    hi=sort(-hi);
    global a1 a2 a3
    a1=hi(1); a2=hi(2); a3=hi(3);
    T=[0 30000];
    x0=zeros(3,1);
    [t,x]=ode15s(@fast30,T,x0);
    %----- Switch times -----
    T1_N=sort([x(end,1), x(end,2), x(end,3)]);
    t1=T1_N(1); t2=T1_N(2); t3=T1_N(3);
    fprintf('\t МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ:\n')
    for I=1:3
        fprintf('\t t%d=%g\n', I, T1_N(I))
    end
    %----- Switch diagram -----
    figure(3),
    plot(t,x(:,1), 'r--', 'linew',2), grid off, hold on,
    plot(t,x(:,2), 'k-', 'linew',2)
    plot(t,x(:,3), 'b:', 'linew',2)
    set(gcf,'color','w'),
    legend('\bf x_1(t)', '\bf x_2(t)', '\bf x_3(t)', 5)

```



```

fprintf('t МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ:\n')
for I=1:4
    fprintf('t t%d=%g\n',I,T1_N(I))
end
%----- Switch diagram -----
figure(4),
plot(t,x(:,1),'r--','linew',2),grid off,hold on,
plot(t,x(:,2),'k-','linew',2)
plot(t,x(:,3),'b:','linew',2)
plot(t,x(:,4),'gx','linew',2)
set(gcf,'color','w'),
legend('\bf x_1(t)','\bf x_2(t)','\bf x_3(t)','\bf x_4(t)',5)
xlabel('\bf Argument'),ylabel('\bf Functions')
title('\bf Search of Switch time ')
hold off
T1=1/a1;T2=1/a2;T3=1/a3;T4=1/a4;
T1_4=[T1,T2,T3,T4];
%----- Transient process -----
s=tf('s');
w1=1/(T1*s+1);
w2=K/(T2*s+1);
w3=1/(T3*s+1);
w4=1/(T4*s+1);
W1234=w1*w2*w3*w4;
s4=ss(W1234);
global A B C D
[A,B,C,D]=ssdata(s4);
%----- 1-st interval -----
T0=[0 t1];
x0=zeros(length(A),1);
[tt1,x]=ode45(@f_ast,T0,x0);
DU=D*Um*ones(length(tt1),1);
y1=x*C'+DU;
%----- 2-nd interval -----
TT=[t1 t2];
x02=x(end,:);
[tt2,x2]=ode45(@f_ast2,TT,x02);
DU2=-D*Um*ones(length(tt2),1);
y2=x2*C'+DU2;
%----- 3-d interval -----
TTT=[t2 t3];
x03=x2(end,:);
[tt3,x3]=ode45(@f_ast,TTT,x03);
DU3=D*Um*ones(length(tt3),1);
y3=x3*C'+DU3;
%----- 4-th interval -----
T12_4=[t3 t4];
x04=x3(end,:);
[tt4,x4]=ode45(@f_ast2,T12_4,x04);
DU4=-D*Um*ones(length(tt4),1);
y4=x4*C'+DU4;
fprintf('\n\t МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ: %g\n',max([T1 T2 T3
T4])/min([T1 T2 T3 T4]))
fprintf('t ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ: %1.4f%s\n',abs(xn-y4(end))/xn*100,'%')
%----- Diagram -----
figure(44),
plot(tt1,y1,'linew',2),grid off,hold on,
plot(tt2,y2,'linew',2),
plot(tt3,y3,'linew',2),
plot(tt4,y4,'linew',2),

```

```

line([0 t4 t4],[xn xn 0],'linew',2,'linestyle',':', 'color','r')
ylim([0 xn+0.1*xn])
title(['\bf',sprintf('Transient process: Experimental xn=%g, True xn=%g',y4(end),xn)])
set(gcf,'color','w')
xlabel('\bf Time'),ylabel('\bf Output System')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ----- 5 order -----
elseif length(hi)==5
    hi=sort(-hi);
%----- Transfer function design -----
    s=tf('s');
    w=1;
    for J=1:length(rr)
        w=w*1/(rr(J)*s+1);
    end
    W=K*w;
%----- System modeling-----
    sN=ss(W);
    global A B
    [A,B,C,D]=ssdata(sN);
    if length(A)==5
        fprintf('\n\t ОБЪЕКТ 5-ГО ПОРЯДКА\n')
    elseif length(A)>5
        fprintf('\n\t ОБЪЕКТ %d-го ПОРЯДКА\n',length(A))
    end
%-----
    global a1 a2 a3 a4 a5
    a1=hi(1);a2=hi(2);a3=hi(3);a4=hi(4);a5=hi(5);
    T=[0 50000];
    x0=zeros(5,1);
    [t,x]=ode15s(@fast50,T,x0);
    T1_N=sort([x(end,1),x(end,2),x(end,3),x(end,4),x(end,5)]);
%----- Switch times -----
    t1=T1_N(1);t2=T1_N(2);t3=T1_N(3);t4=T1_N(4);t5=T1_N(5);
    fprintf('\t МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ ОБЪЕКТА 5-ГО ПОРЯДКА:\n')
    for I=1:5
        fprintf('\t t%d=%g\n',I,T1_N(I))
    end
%----- Switch diagram -----
    figure(5),
    plot(t,x(:,1),'r--','linew',2),grid off,hold on,
    plot(t,x(:,2),'b:','linew',2)
    plot(t,x(:,3),'m-','linew',2)
    plot(t,x(:,4),'go','linew',2)
    plot(t,x(:,5),'kx','linew',2)
    set(gcf,'color','w'),
    legend('\bf x_1(t)','\bf x_2(t)','\bf x_3(t)','\bf x_4(t)','\bf x_5(t)',5)
    xlabel('\bf Argument'),ylabel('\bf Functions')
    title('\bf Search of Switch time')
    hold off
    T1=1/a1;T2=1/a2;T3=1/a3;T4=1/a4;T5=1/a5;
    T1_5=[T1,T2,T3,T4,T5];
    if length(rr)==5
        fprintf('\n\t МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ ОБЪЕКТА 5-го
        ПОРЯДКА: %g\n',max(rr)/min(rr))
    elseif length(rr)>5
        fprintf('\n\t МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ ДЛЯ
        СОКРАЩЕННОЙ СИСТЕМЫ: %g\n',max(T1_5)/min(T1_5))
        fprintf('\t МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ ИСХОДНОЙ
        СИСТЕМЫ: %g\n',max(rr)/min(rr))
    end

```

```

fprintf('\t ПОРЯДОК ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ: %d\n',length(rr))
fprintf('\t ПОРЯДОК СОКРАЩЕННОЙ СИСТЕМЫ: %d\n',length(hi))
end
%----- 1-st interval -----
T0=[0 t1];
x0=zeros(length(A),1);
[tt1,x]=ode45(@f_ast,T0,x0);
DU=D*Um*ones(length(tt1),1);
y1=x*C'+DU;
%----- 2-nd interval -----
TT=[t1 t2];
x02=x(end,:);
[tt2,x2]=ode45(@f_ast2,TT,x02);
DU2=-D*Um*ones(length(tt2),1);
y2=x2*C'+DU2;
%----- 3-d interval -----
TTT=[t2 t3];
x03=x2(end,:);
[tt3,x3]=ode45(@f_ast,TTT,x03);
DU3=D*Um*ones(length(tt3),1);
y3=x3*C'+DU3;
%----- 4-th interval -----
T12_4=[t3 t4];
x04=x3(end,:);
[tt4,x4]=ode45(@f_ast2,T12_4,x04);
DU4=-D*Um*ones(length(tt4),1);
y4=x4*C'+DU4;
%----- 5-th interval -----
T12_5=[t4 t5];
x05=x4(end,:);
[tt5,x5]=ode45(@f_ast,T12_5,x05);
DU5=D*Um*ones(length(tt5),1);
y5=x5*C'+DU5;
%----- Relative error -----
Error5=abs(xn-y5(end))/xn*100;
fprintf('\t ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ: %1.4f%%\n',Error5,'%')
%----- Diagram -----
figure(55),
plot(tt1,y1,'linew',2),grid off,hold on,
plot(tt2,y2,'linew',2),
plot(tt3,y3,'linew',2),
plot(tt4,y4,'linew',2),
plot(tt5,y5,'linew',2),
line([0 t5],[xn xn 0],'linew',2,'linestyle',':','color','r')
ylim([0 xn+0.1*xn])
title(['\bf',sprintf('Transient process: Experimental xn=%1.4f, True xn=%1.4f',y5(end),xn)])
set(gcf,'color','w')
xlabel('\bf Time'),ylabel('\bf System output')
end

```

Примечание

В приведенной программе есть ссылки на М-функции, описывающие правые части дифференциальных уравнений (3.1) и уравнений, по которым производится построение переходного процесса. Эти М-функции здесь не приводятся, т. к. любой пользователь MATLAB самостоятельно может их описать.

УДК 681.511.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КАНОНИЗАЦИИ ПРИ СИНТЕЗЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМ ОБЪЕКТОМ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЛОЖЕНИЯ

Ахметзянов И. З.

*Камский государственный политехнический институт, Набережные Челны,
e-mail: insurz@mail.ru*

1. Введение

Технология вложения является относительно новым направлением теории систем, интенсивно развиваемым в последние годы [1, 2]. Основными особенностями технологии являются:

- универсальность, то есть применимость для решения широкого класса задач теории управления, связанных с анализом, синтезом, идентификацией систем и др.;
- направленность на задачи, в которых объект является многосвязным;
- получение условий, однозначно определяющих наличие или отсутствие решения рассматриваемой задачи;
- получение математически точного решения задачи, которое может быть единственным или представлять собой класс эквивалентных решений. В последнем случае технология обеспечивает получение параметризованного описания класса решений.

Постановка рассматриваемой задачи может представлять собой записанную в произвольной форме систему уравнений. Использование вложения систем позволяет преобразовать исходную систему уравнений к системе, содержащей только линейные и/или билинейные матричные уравнения [3]. Решение задачи сводится к получению решения такой системы уравнений. В принципе, для этой цели можно использовать любые доступные методы, например, детерминантные методы, основанные на правиле Крамера [4], либо численные методы [5]. Однако этим методам присущи ограничения, связанные либо с низкой эффективностью решения уравнений высокого порядка, либо с невозможностью получения решения в аналитическом виде.

Метод канонизации, предложенный в [6, 7], позволяет эффективно решать матричные уравнения с возможностью аналитического исследования получаемого решения. Суть метода сводится к представлению решения матричного уравнения в виде формул, содержащих специальные матричные конструкции: левые и правые делители нуля, левые, правые, свод-

ные канонизаторы матриц, входящих в уравнение. Эти формулы описывают, во-первых, условия разрешимости уравнений, во-вторых, представляют в параметризованном виде весь класс решений. Метод канонизации применим для решения односторонних, двусторонних линейных матричных уравнений, а также для решения различных видов билинейных уравнений.

Метод канонизации удобен также в вычислительном плане. Для его использования в процессе решения различных задач, связанных с решением матричных уравнений, в среде MATLAB разработана программа [8], выполняющая канонизацию матриц произвольного размера.

В данной работе рассматривается конкретный методический пример решения задачи синтеза системы управления многосвязным объектом с применением метода канонизации.

2. Формальное решение задачи

Объект управления задан моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\varepsilon, & x(t_0) &= x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта, $\varepsilon \in \mathbb{R}^s$ — вектор входных сигналов, $y \in \mathbb{R}^m$ — вектор выходных сигналов, матрицы коэффициентов A и B определяют динамические свойства объекта.

Рассмотрим две структуры управления:

1) управление с предкомпенсатором и регулятором в цепи обратной связи (ОС) по состоянию, описывается уравнением

$$\varepsilon = G(p)u - K(p)x, \quad (2)$$

где $u \in \mathbb{R}^s$ — вектор управляющих воздействий, $G(p)$ — матричная передаточная функция предкомпенсатора и $K(p)$ — матричная передаточная функция регулятора в цепи ОС по состоянию (предполагается, что вектор состояния полностью доступен прямому измерению). Структура системы представлена на рис.1, а.

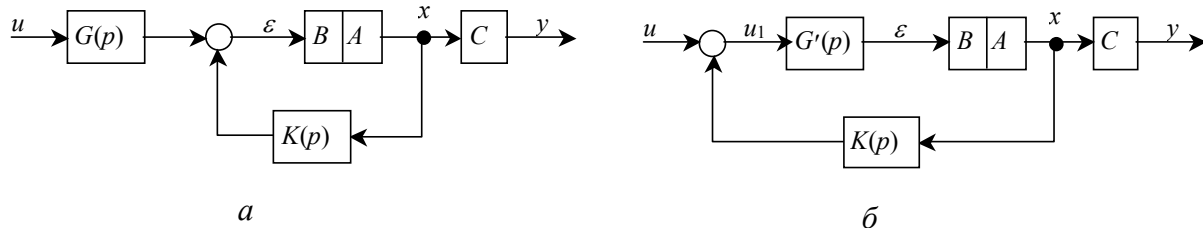


Рис. 1. Структурные схемы замкнутых матричных систем.

2) управление с компенсатором входного сигнала и регулятором в цепи ОС по состоянию, описывается уравнением

$$\varepsilon = G'(p)(u - K(p)x), \quad (3)$$

где $G'(p)$ — матричная передаточная функция компенсатора входного сигнала объекта управления. Этому уравнению соответствует схема на рис.1, б. В данной работе будут рассматриваться только регулярные законы управления, т. е. матрицы $G(p)$ и $G'(p)$ квадратные и обратимые.

Цель синтеза определим в виде заданных реакций замкнутой системы на ненулевые начальные условия и на управляющее воздействие

$$y = E_y^u(p)u + E_y^0(p)x_0, \quad (4)$$

где E_y^u и E_y^0 — матричные передаточные функции, описывающие желаемые вынужденную и свободную составляющие поведения системы. Результатом решения задачи синтеза будет нахождение неизвестных матриц $G(p)$ и $K(p)$, или $G'(p)$ и $K(p)$ для первой и второй структур закона управления соответственно, таких, чтобы матричные передаточные функции в (4) приняли желаемые значения.

Применение технологии вложения систем для синтеза закона управления первой из рассматриваемых структур приводит к следующей системе матричных линейных уравнений

$$\begin{aligned} E_y^0(p)BK(p) &= C - E_y^0(p)(pI_n - A), \\ E_y^0(p)BG(p) &= E_y^u(p) \end{aligned} \quad (5)$$

относительно неизвестных матриц $G(p)$ и $K(p)$. Здесь I_n — единичная матрица размера $n \times n$.

Данная система содержит два левосторонних линейных матричных уравнения, каждое из которых может решаться независимо. Используем метод канонизации в соответствии с [7] для решения системы (5). В результате получим выражения для вычисления искомых матриц в виде

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_\eta &= \overline{E_y^0(p)B} \left(C - E_y^0(p)(pI_n - A) \right) + \overline{E_y^0(p)B}^R \eta, \\ \langle G \rangle_\mu &= \overline{E_y^0(p)B} E_y^u(p) + \overline{E_y^0(p)B}^R \mu, \end{aligned} \quad (6)$$

а также условия разрешимости уравнений

$$\begin{aligned} \overline{E_y^0(p)B}^L (C - E_y^0(p)(pI_n - A)) &= 0, \\ \overline{E_y^0(p)B}^L E_y^u(p) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В (6) η и μ — произвольные дробно-рациональные полиномиальные матрицы подходящих размеров. Здесь и далее в формулах приняты следующие обозначения: для некоторой матрицы D под обозначениями $\overline{\overline{D}}$, \overline{D}^L и \overline{D}^R понимаются сводный канонизатор (канонизатор), левый и правый делители нуля матрицы D соответственно.

Матрицы, вычисленные по формулам (6), являются решением системы (5) только в том случае, если верны тождества (7). В противном случае система (5) не имеет решений.

Для второй структуры закона управления аналогичным образом получена система уравнений относительно неизвестных матриц $G'(p)$ и $K(p)$

$$\begin{aligned} E_y^u(p)K(p) &= C - E_y^0(p)(pI_n - A), \\ E_y^u(p) &= E_y^0(p)BG'(p). \end{aligned} \quad (8)$$

В данной системе уравнения, также как и в (5), являются независимыми. Сравнивая системы (5) и (8) легко заметить, что уравнения для матриц $G(p)$ и $G'(p)$ совпадают,

$$G'(p) = G(p). \quad (9)$$

Формулы для искомых матриц, полученные методом канонизации, имеют вид

$$\begin{aligned} \langle K(p) \rangle_\mu &= \overline{[E_y^u(p)]} (C - E_y^0(p)(pI_n - A)) + \overline{E_y^u(p)}^R \mu, \\ \langle G'(p) \rangle_\eta &= \overline{[E_y^0(p)B]} E_y^u + \overline{E_y^0(p)B}^R \eta, \end{aligned} \quad (10)$$

условия разрешимости уравнений

$$\begin{aligned} \overline{E_y^u(p)}^L (C - E_y^0(p)(pI_n - A)) &= 0, \\ \overline{E_y^0(p)B}^L E_y^u(p) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия разрешимости (7) и второе условие (11) являются тождествами в практически значимом случае, когда $\text{rank}(E_y^0(p)B) \geq m$, и, следовательно, $\overline{E_y^0(p)B}^L = 0$. Аналогично первое из условий (11) становится тождеством, если $\text{rank}(E_y^u(p)) \geq m$.

4. Объект управления и требования к системе управления

В качестве объекта управления рассмотрим многосвязную систему четвертого порядка, заданную моделью в пространстве состояний (1), где матрицы коэффициентов принимают значения

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.1520 & 0.4226 & 0.9063 & 0.0960 \\ -18.6430 & -1.06 & 1.6 & 0 \\ -1.7570 & -0.1530 & -0.1360 & 0 \\ 0 & 1 & -4.6630 & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -0.0320 & 0 & -0.1 \\ -1.8740 & -8.9660 & 1 \\ -1.460 & 0.304 & 0 \\ 0 & 1.280 & -1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Цели управления определим в виде двух желаемых матричных передаточных функций

$$E_y^0(p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p+10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p+3} \end{bmatrix}, \quad E_y^u(p) = \begin{bmatrix} \frac{2}{p+10} & 0 & \frac{1}{(p+10)(p+3)} \\ 0 & \frac{1}{p+3} & \frac{p}{(p+3)(p+10)} \end{bmatrix}.$$

5. Решение задачи синтеза

Для синтеза закона управления многосвязным объектом разработана программа, представляющая собой скрипт на языке MATLAB. Листинг ее приведен в Приложении. В вычислениях использовано символьное представление дробно-рациональных полиномиальных матриц; в символьном виде заданы оператор Лапласа p , а также элементы произвольных матриц. Скрипт включает процедуры синтеза законов управления для систем с рассмотренными структурами (3) и (4).

Синтезируем закон управления для системы со структурой, соответствующей (3).

На первом этапе выполняется проверка условий разрешимости (7), для чего вычисляется произведение

$$E_y^0(p)B = \begin{bmatrix} -\frac{1.874}{p+10} & -\frac{8.966}{p+10} & \frac{1}{p+10} \\ 0 & \frac{1.28}{p+3} & -\frac{1}{p+3} \end{bmatrix}.$$

Затем выполняется канонизация полученной матрицы:

$$\overline{E_y^0(p)B}^L = []_{0 \times 2}, \quad \overline{E_y^0(p)B}^R = \begin{bmatrix} -3.2042 \\ 0.7813 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{E_y^0(p)B}} = \begin{bmatrix} -5.3362(p+1) & -11.213-3.7378p \\ 0 & 2.3438+0.7813p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запись $[]_{0 \times 2}$ здесь и далее означает, что соответствующая матрица имеет нулевой размер. Левый делитель нуля в данном случае не существует, следовательно, оба условия разрешимости (7) выполняются.

Следующим шагом является вычисление матрицы $K(p)$ по формуле (6), представляющей собой сумму частного и общего решений первого уравнения системы (5). Вначале вычисляется частное решение

$$\dot{K} = \begin{bmatrix} 9.9482 & -8.5084 & 16.576 & -11.213 \\ 0 & 0.7813 & -3.643 & 2.3438 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

затем общее решение, включающее элементы произвольной матрицы

$$K_{\eta} = \begin{bmatrix} -3.2042 \\ 0.7813 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \end{bmatrix}.$$

Тогда решение первого уравнения (5) примет вид множества, порожденного элементами произвольной матрицы η

$$K = \dot{K} + K_{\eta} = \begin{bmatrix} 9.948 - 3.204\eta_{11} & -8.508 - 3.204\eta_{12} & 16.576 - 3.204\eta_{13} & -11.213 - 3.204\eta_{14} \\ 0.781\eta_{11} & 0.781(\eta_{12} + 1) & -3.643 + 0.781\eta_{13} & 2.344 + 0.781\eta_{14} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Далее аналогичным способом вычисляется матрица $G(p)$ в виде суммы частного решения

$$\dot{G}(p) = \begin{bmatrix} -0.5336 & -3.7378 & -3.7378 \frac{p^2 + 3.1428p + 1.4276}{(p+3)(p+10)} \\ 0 & 0.7813 & \frac{0.7813p}{p+10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и общего решения

$$G_{\mu} = \begin{bmatrix} -3.2042 \\ 0.7813 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \end{bmatrix}.$$

В результате выражение для матрицы предкомпенсатора $G(p)$ принимает вид множества, порожденного произвольными элементами матрицы μ

$$G(p) = \dot{G} + G_{\mu} = \begin{bmatrix} -0.534 - 3.204\mu_{11} & -3.738 - 3.204\mu_{12} & -3.204\mu_{13} - 3.738 \frac{p^2 + 3.143p + 1.428}{(p+3)(p+10)} \\ 0.781\mu_{11} & 0.781(\mu_{12} + 1) & 0.781 \frac{p+10 + (p+1)\mu_{13}}{p+10} \\ \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) полностью описывают класс решений системы уравнений (5).

На завершающем этапе осуществляется выбор конкретных значений искомых матриц $G(p)$ и $K(p)$ путем определения элементов произвольных матриц η и μ . Очевидно, что эта процедура может проводиться для каждой матрицы независимо.

Теперь выполним синтез закона управления объектом в соответствии с (4). Требуется найти решение системы матричных уравнений (8).

На первом этапе проверяются условия разрешимости системы уравнений. Первое из условий (11) совпадает с первым условием (7). Для того, чтобы второе условие (11) стало тождеством, достаточно, чтобы у матрицы $E_y^u(p)$ отсутствовал левый делитель нуля. Для этого выполним канонизацию матрицы $E_y^u(p)$:

$$\overline{E_y^u(p)}^L = [I_{0 \times 2}, \overline{E_y^u(p)}^R] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{p+3} \\ -\frac{p}{p+10} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\overline{\overline{E_y^u(p)}} = \begin{bmatrix} p+10 & 0 \\ 0 & p+3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, левого делителя нуля $E_y^u(p)$ не существует. Таким образом, для заданных матриц $E_y^0(p)$, $E_y^u(p)$ система уравнений (8) имеет решение.

По формуле (10) и с учетом (14) вычисляется матрица регулятора $K(p)$ в виде множества эквивалентных значений, порожденного элементами произвольной матрицы μ

$$K(p) = \overset{\circ}{K} + K_{\eta}(p) = \begin{bmatrix} -18.643 & 8.94 & 1.6 & 0 \\ 0 & 1 & -4.663 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{p+3} \\ -\frac{p}{p+10} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{18.643p+55.93+\eta_{11}}{p+3} & \frac{8.94p+26.82-\eta_{12}}{p+3} & \frac{1.6p+4.8-\eta_{13}}{p+3} & \frac{-\eta_{14}}{p+3} \\ -\frac{p\eta_{11}}{p+10} & -\frac{p+10+p\eta_{12}}{p+10} & -\frac{4.663p+46.63+p\eta_{13}}{p+10} & \frac{3p+30-p\eta_{14}}{p+10} \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \eta_{14} \end{bmatrix}.$$

По формуле (10) находится решение второго уравнения системы (8) относительно матрицы $G'(p)$. Вследствие равенства (9) выражение для множества матриц $G'(p)$ совпадает с (13).

Проверка правильности полученного решения и в первом, и во втором случаях производится подстановкой матриц $G(p)$ и $K(p)$, $G'(p)$ и $K(p)$ соответственно в формулы для передаточных функций $E_y^0(p)$, $E_y^u(p)$. Проверка показала, что найденные решения действительно обеспечивают полное соответствие параметров синтезированных систем желаемым требованиям.

6. Заключение

В данной работе на конкретном методическом примере синтеза законов управления многосвязным объектом иллюстрируется использование метода канонизации для эффективного решения линейных матричных уравнений как в общем виде, так и в машинных расчетах в среде MATLAB. Метод обеспечивает, во-первых, получение соотношений, описывающих весь класс эквивалентных решений задачи, во-вторых, формирование условий разрешимости систем линейных матричных уравнений.

Метод канонизации значительно повышает эффективность использования технологии вложения систем для решения практических задач теории управления.

Литература

1. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Горюнов С. В. Анализ и синтез матричных систем. Сравнение подходов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— №11.— С.3–44.

2. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В. Основы технологии вложения систем // Труды III междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления». — М.: ИПУ РАН, 2004. — С.92–111. (CD ISBN 5-201-14966-9)
3. Буков В.Н., Рябченко В.Н. Вложение систем. Произвольные образы // Автоматика и телемеханика. — 2000. — №12. — С.3–14.
4. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980. — 454 с.
5. Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 192 с.
6. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Горюнов С. В., Косьянчук В. В., Кулабухов В. С., Наумов А. И., Основы интеграции систем авиационного оборудования. — М.: Изд-во Военного авиац. техн. ун-та, 2002. — 123 с.
7. Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зябин Е. Ю. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского университета. Серия: Физико-математические науки. — Вып.1. — 2002. — С.19–28.
8. Асанов А. З., Ахметзянов И. З. Канонизация матриц произвольного размера средствами MATLAB // Труды 2 всероссийской науч. конф. «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB». — М.: ИПУ РАН, 2004.

Приложение 1.

Листинг скрипта для синтеза системы управления объектом (1).

```
% скрипт для синтеза управления многосвязным линейным объектом
% в скрипте используются пользовательские функции:
% canonize      канонизация матриц
% createsymarray  вспомогат. Функция, формирует матрицу символьных
% элементов заданного размера
% symkcoefdeclare  вспомогат. Функция, формирует список символьных
% элементов матрицы в текстовой переменной
%
%
% символьное представление оператора Лапласа
syms p
% матрицы модели объекта регулирования в ПС
a = [-0.152 0.4226 0.9063 0.096; ...
     -18.643 -1.06 1.6 0; ...
     -1.757 -0.153 -0.136 0; ...
     0 1 -4.663 0];
b = [-0.032 0 -0.1; -1.874 -8.966 1; -1.46 0.304 0; 0 1.28 -1];
c = [0 1 0 0; 0 0 0 1];
d = zeros(size(c,1),size(b,2));

% формализация требований к СУ: формирование образов
% жМПФ по свободной составляющей
e0y = [0 1/(p+10) 0 0; 0 0 0 1/(p+3)];
```



```
% жМПФ по вынужденной составляющей
euy = [1/(p+10) 0 1/(p+3)/(p+10); ...
       0 1/(p+3) p/(p+3)/(p+10)];

%выбор структуры синтезируемого закона управления
variant = 1;

switch variant
case 1
    % синтез по вын. и своб. составляющим.
    % структура с предкомпенсатором и регулятором в цепи ОС (матр. K (p) и G (p) )

    % проверка условий разрешимости системы матричных уравнений
    e0yb = e0y*b;
    e0yb = simplify(e0yb);
    % канонизация e0yb
    [e0ybl_,e0ybr_,e0ybl,e0ybr,e0ybc] = canonize(e0yb);
    % если левый делитель нуля e0ybl_ не существует, значит оба условия тождест-
    венно выполняются
    if ~isempty(e0ybl_)
        % 1 условие
        cond1 = e0ybl_*(c-e0y*(p-eye(size(a,1))-a));
        cond1 = simplify(cond1);
        % 2 условие
        cond2 = e0ybl_*euy;
        cond2 = simplify(cond2);
    else
        cond1 = 0;
        cond2 = 0;
    end

    if cond1 ~= 0
        error('Условие разрешимости первого уравнения не выполняется');
    end
    if cond2 ~= 0
        error('Условие разрешимости второго уравнения не выполняется');
    end

    % вычисление матриц G и K

    % первое уравнение
    % частное решение
    k = e0ybc*(c-e0yb*(p*eye(size(a,1))-a));
    % общее решение
    if ~isempty(e0ybr_)
        % формирование и инициализация символьных матриц и их элементов
        nu = sym(createsymarray([size(e0ybr_,2) size(a,2)], 'nu'));
        symlist = symkoefdeclare(nu, 'n');
        eval(['syms ' symlist])
    end
end
```

```

    k1 = e0ybr_*nu;
end
% формирование полного множества регуляторов K (p)
K = k + k1;
K = simplify(K);

% второе уравнение
% частное решение
g = e0ybc*eu;
% общее решение
if ~isempty(e0ybr_)
    % формирование и инициализация символьных матриц и их элементов
    mu = sym(createsymarray([size(e0ybr_,2) size(eu,2)], 'mu'));
    symlist = symkoefdeclare(mu, 'mu');
    eval(['syms ' symlist])

    g1 = e0ybr_*mu;
end
% формирование полного множества предкомпенсаторов G(p)
G = g + g1;
G = simplify(G);

% проверка правильности решения
% формула МПФ от н.у. к выходу
e0y_ = c*(p*eye(size(a,1))-a+b*K)^-1;
e0y_ = simplify(e0y_);
% формула МПФ от входа к выходу
eu_ = c*(p*eye(size(a,1))-a+b*K)^-1*b*G;
eu_ = simplify(eu_);

case 2
% синтез по вын. и своб. составляющим.
% структура с компенсатором и регулятором в цепи ОС (матр. K (p) и G' (p) )

% проверка условий разрешимости системы матричных уравнений
e0yb = e0y*b;
e0yb = simplify(e0yb);
% канонизация etfb
[e0ybl_, e0ybr_, e0ybl, e0ybr, e0ybc] = canonize(e0yb);
% если левый делитель нуля e0ybl_ не существует, значит условие становится %
тождеством
if ~isempty(e0ybl_)
    % 1 условие
    cond1 = e0ybl_*eu;
    cond1 = simplify(cond1);
else
    cond1 = 0;
end

if any(any(cond1 ~= 0))

```

```

    error('Условие разрешимости первого уравнения не выполняется');
end
%   вычисление матрицы компенсатора G' (p)
%   частное решение
g = etfbc*etfuy;
%   общее решение
if ~isempty(e0ybr_)
    %   формирование и инициализация символьных матриц и их элементов
    mu = sym(createsymarray([size(e0ybr_,2) size(euy,2)], 'mu'));
    symlist = symkoefdeclare(mu, 'mu');
    eval(['syms ' symlist])

    g1 = e0ybr_*mu;
end
%   формирование полного множества компенсаторов G' (p)
G = g + g1;
G = simplify(G);

%   проверка условий разрешимости второго уравнения
%   канонизация euy
[eul_, eur_, eul, eur, euc] = canonize(euy);
if ~isempty(eul_)
    %   2 условие
    cond2 = eul_*(c-e0y*(p*eye(size(a,1))-a));
    cond2 = simplify(cond2);
else
    cond2 = 0;
end

%   анализ условий разрешимости второго уравнения
if any(any(cond2 ~= 0))
    error('Первое условие разрешимости второго уравнения не выполняется');
end
%   вычисление матрицы регулятора в цепи обратной связи K (p)
%   частное решение
k = euc*(c-e0y*(p*eye(size(a,1))-a));
%   общее решение
k1 = zeros(size(k));
if ~isempty(eur_)
    %   формирование и инициализация символьных матриц и их элементов
    nu = sym(createsymarray([size(eur_,2) size(a,2)], 'nu'));
    symlist = symkoefdeclare(nu, 'nu');
    eval(['syms ' symlist])

    k1 = eur_*nu;
end
%   формирование полного множества регуляторов K (p)
K = k + k1;
K = simplify(K);

```

```
% проверка правильности решения
%   формула МПФ от н.у. к выходу
e0y_ = c*(p*eye(size(a,1))-a+b*G*K)^-1;
e0y_ = simplify(e0y_);
%   формула МПФ от входа к выходу
euy_ = c*(p*eye(size(a,1))-a+b*G*K)^-1*b*G;
euy_ = simplify(euy_);
end
```

УДК 681.513.3:519.711.3:681.3.06

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С СИЛОВЫМ ГИДРОЦИЛИНДРОМ В СРЕДЕ MATLAB

Баунин В. Г., Швецов Н. В.

*ФГУП «ВНИИ «Сигнал», Ковров, Владимирская обл.,
e-mail: signal@kovrov.ru*

Электрогидравлические следящие системы (ЭГСС) с силовым цилиндром получили широкое применение для перемещения рабочих органов манипуляторов различных машин благодаря таким их достоинствам как малые веса и габариты, большая удельная мощность, возможность соединения исполнительного двигателя — гидроцилиндра непосредственно с рабочим органом манипулятора без промежуточной механической передачи. Вместе с тем для гидропривода с исполнительным гидроцилиндром характерны следующие недостатки:

- наличие изменяющегося в зависимости от угла поворота рабочего органа манипулятора передаточного отношения в силовой цепи;

- наличие большого и изменяющегося объема рабочей жидкости, заключенной в полостях гидроцилиндра.

Изменение передаточного отношения силовой цепи приводит к изменению коэффициента передачи, а также к изменению собственной резонансной частоты гидропривода. Изменение объемов рабочей жидкости в полостях гидроцилиндра также вызывает изменение собственной резонансной частоты гидропривода. Таким образом, гидропривод с исполнительным цилиндром представляет собой систему с переменными параметрами, что затрудняет синтез высокودинамичных ЭГСС на базе гидропривода с исполнительным цилиндром. В связи с этим выбор структуры и параметров корректирующих устройств ЭГСС с силовым гидроцилиндром целесообразно проводить на основе математического моделирования. Одним из наиболее удобных средств для решения этой задачи является пакет Simulink, входящий в систему программных средств MATLAB.

Как показали исследования ЭГСС с силовым гидроцилиндром [1, 2], обеспечение высоких динамических характеристик в таких системах возможно при использовании нелинейных корректирующих устройств, компенсирующих изменение передаточного отношения силовой цепи. Данные корректирующие устройства могут быть реализованы в ЭВМ, осуществляющей управление манипулятором.

В общем случае математическая модель цифровой ЭГСС с силовым цилиндром включает математическую модель гидропривода с силовым

цилиндром, математическую модель аналоговых корректирующих устройств, математическую модель цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) и алгоритм управления приводом манипулятора, реализуемый в ЭВМ.

Динамика силовой части гидропривода объемного регулирования, включающей регулируемый насос и исполнительный гидроцилиндр, описывается уравнениями расходов в полостях выдвижения и втягивания гидроцилиндра и уравнением моментов на валу нагрузки [3].

Уравнения расходов в полостях выдвижения 1 и втягивания 2 имеют следующий вид:

$$Q_{e1}(t) = Q_{нг}(t) - Q_{y1}(t) - Q_{ке1}(t) - Sp\Delta L(t) + Q_{п1}(p_1(t)), \quad (1)$$

$$Q_{e2}(t) = -Q_{нг}(t) - Q_{y2}(t) + Q_{ке2}(t) + Sp\Delta L(t) + Q_{п2}(p_2(t)), \quad (2)$$

где $Q_{e1}(t)$, $Q_{e2}(t)$ — деформационные расходы рабочей жидкости в полостях выдвижения 1 и втягивания 2 при изменении в них давления; $Q_{нг}(t)$ — геометрическая подача насоса; $Q_{y1}(t)$, $Q_{y2}(t)$ — расходы утечек из полостей выдвижения и втягивания; $Q_{ке1}(t)$, $Q_{ке2}(t)$ — расходы, определяемые компрессией и декомпрессией рабочей жидкости при прохождении ее через насос; S — площадь поршня силового гидроцилиндра; p — оператор дифференцирования; $\Delta L(t)$ — перемещение штока силового гидроцилиндра; $p_1(t)$, $p_2(t)$ — давления в полостях выдвижения и втягивания; $Q_{п1}(p_1(t))$, $Q_{п2}(p_2(t))$ — подача вспомогательного насоса, зависящая от давления в соответствующей полости гидроцилиндра.

Геометрическая подача насоса определяется по выражению:

$$Q_{нг}(t) = w\Omega_n(t)e(t), \quad (3)$$

где w — характерный объем насоса; $\Omega_n(t)$ — скорость вращения вала насоса; $e(t)$ — параметр регулирования насоса.

Деформационные расходы в полостях выдвижения и втягивания определяются по выражениям:

$$Q_{e1}(t) = \frac{V_1(t)}{E} pp_1(t), \quad (4)$$

$$Q_{e2}(t) = \frac{V_2(t)}{E} pp_2(t), \quad (5)$$

где $V_1(t)$, $V_2(t)$ — текущие объемы полостей выдвижения и втягивания; E — объемный модуль упругости рабочей жидкости.

Расходы утечек из полостей 1 и 2 пропорциональны давлениям в этих полостях и определяются уравнениями:

$$Q_{y1}(t) = K_y p_1(t), \quad (6)$$

$$Q_{y2}(t) = K_y p_2(t), \quad (7)$$

где K_y — коэффициент утечек.

Расходы $Q_{п1}(p_1(t))$ и $Q_{п2}(p_2(t))$ вспомогательного насоса определяются зависимостями:

$$Q_{п1}(p_1(t)) = \begin{cases} 0 & \text{при } p_1(t) \geq p_{пм}, \\ K_{всп}(p_{пм} - p_1(t)) & \text{при } p_{пм} - \frac{Q_{вт}}{K_{всп}} < p_1(t) < p_{пм}, \\ Q_{вт} & \text{при } p_1(t) < p_{пм} - \frac{Q_{вт}}{K_{всп}}; \end{cases} \quad (8)$$

$$Q_{п2}(p_2(t)) = \begin{cases} 0 & \text{при } p_2(t) \geq p_{пм}, \\ K_{всп}(p_{пм} - p_2(t)) & \text{при } p_{пм} - \frac{Q_{вт}}{K_{всп}} < p_2(t) < p_{пм}, \\ Q_{вт} & \text{при } p_2(t) < p_{пм} - \frac{Q_{вт}}{K_{всп}}. \end{cases} \quad (9)$$

В выражениях (8) и (9) приняты обозначения: $Q_{вт}$ — максимальная подача вспомогательного насоса; $p_{пм}$ — максимальное давление системы подпитки; $K_{всп}$ — коэффициент расходной характеристики системы подпитки.

Расходами, обусловленными компрессией и декомпрессией рабочей жидкости при прохождении ее через насос, ввиду их малой величины, в уравнениях (1) и (2) можно пренебречь. Тогда с учетом выражений (3)-(7) уравнения расходов в полостях выдвижения и втягивания (1), (2) примут следующий вид:

$$\frac{V_1(t)}{E} pp_1(t) = w\Omega_n(t)e(t) - K_y p_1(t) - Sp\Delta L(t) + Q_{п1}(p_1(t)), \quad (10)$$

$$\frac{V_2(t)}{E} pp_2(t) = -w\Omega_n(t)e(t) - K_y p_2(t) + Sp\Delta L(t) + Q_{п2}(p_2(t)). \quad (11)$$

Уравнение моментов на валу нагрузки:

$$[p_1(t) - p_2(t)]gSR = Jp^2\varphi(t) + M_{тр} \text{sign}\Omega(t) + M_{н\gamma} \cos\varphi(t), \quad (12)$$

где g — ускорение свободного падения; R — плечо передачи усилия гидроцилиндра; J — момент инерции нагрузки относительно оси цапф; $\varphi(t)$ — угол поворота нагрузки; $M_{тр}$ — момент трения нагрузки; $M_{н\gamma}$ — момент неуравновешенности нагрузки; $\Omega(t)$ — текущая угловая скорость движения нагрузки.

Плечо передачи усилия гидроцилиндра при схеме привязки, приведенной на рис. 1, рассчитывается по выражению:

$$R = \frac{ac}{L} \sin(\varphi + \varphi_n), \quad (13)$$

где a, c, L — параметры привязки силового гидроцилиндра; $(\varphi + \varphi_n)$ — угол при вершине силового треугольника, совпадающей с осью вращения нагрузки.

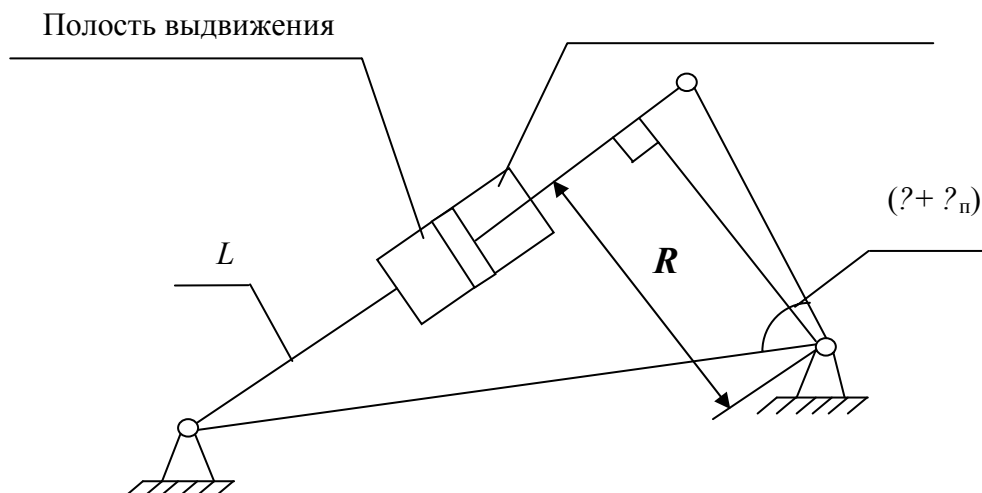


Рис. 1. Схема привязки силового гидроцилиндра.

Длина силового треугольника L определяется по теореме косинусов:

$$L = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\varphi + \varphi_n)} . \quad (14)$$

Тогда перемещение штока силового гидроцилиндра $\Delta L(t)$:

$$\Delta L(t) = L(t) - L_0, \quad (15)$$

где L_0 — длина стороны силового треугольника при полностью втянутом штоке (угол $\varphi = 0^\circ$).

Объемы полостей выдвижения 1 и втягивания 2 определяются по выражениям:

$$V_1(t) = V_{1\min} + S\Delta L(t), \quad (16)$$

$$V_2(t) = V_{2\max} - S\Delta L(t), \quad (17)$$

где $V_{1\min}$ — минимальный объем полости выдвижения; $V_{2\max}$ — максимальный объем полости втягивания.

Изменение подачи насоса осуществляется за счет перемещения регулирующего органа — люльки механизмом управления, состоящим из электромагнита и двухкаскадного гидроусилителя. Первый каскад гидроусилителя представляет собой усилитель типа сопло-заслонка. Второй каскад включает исполнительные гидроцилиндры и золотниковый гидрораспределитель, управляющий подачей рабочей жидкости в гидроцилиндры. Гидроцилиндры осуществляют непосредственное управление положением люльки насоса. Механизм управления также имеет датчик положения люльки с коэффициентом передачи $K_{\text{ду}}$ и датчик скорости люльки с крутизной $K_{\text{тг}}$.

Динамика механизма управления описывается следующей системой уравнений:

— уравнением напряжений на обмотках электромагнита:

$$U_{\text{эм}}(t) = (T_{\text{эм}} p + 1) R_{\text{эм}} i_{\text{я}}(t), \quad (18)$$

где $U_{эм}(t)$ — напряжение на обмотках электромагнита; $i_я(t)$ — текущее значение тока в обмотках электромагнита; $T_{эм}$ — электромагнитная постоянная времени электромагнита; $R_{эм}$ — сопротивление обмоток электромагнита;

— уравнением моментов, действующих на ротор электромагнита:

$$(J_{эм}p^2 + F_{эм}p + C_{эм})\alpha_{эм}(t) = K_i i_я(t) - h_c K_r p_c(t), \quad (19)$$

где $J_{эм}$ — момент инерции ротора с закрепленной на нем заслонкой; $F_{эм}$ — коэффициент момента вязкого трения, действующего на ротор электромагнита; $C_{эм}$ — жесткость пружины заслонки, приведенная к ротору электромагнита; $\alpha_{эм}(t)$ — угол поворота ротора электромагнита; K_i — коэффициент момента электромагнита; h_c — расстояние от оси вращения ротора электромагнита с закрепленной на нем заслонкой до линии установки сопел первого каскада гидроусилителя; K_r — коэффициент гидродинамического сопротивления повороту ротора электромагнита; $p_c(t)$ — перепад давлений в первом каскаде гидроусилителя;

— уравнением расходов первого каскада:

$$f_T p y(t) = K_q h_c \alpha_{эм}(t) - K_{ж} p_c(t), \quad (20)$$

где f_T — площадь торца золотника; $y(t)$ — текущее положение золотника; K_q — коэффициент усиления по расходу первого каскада; $K_{ж}$ — коэффициент жесткости расходной характеристики;

— уравнением сил, действующих на золотник:

$$(m_3 p^2 + F_3 p + C_3 + C_{гд})y(t) = f_T p_c(t), \quad (21)$$

где m_3 — масса золотника; F_3 — коэффициент вязкого трения; C_3 — жесткость пружины золотника; $C_{гд}$ — гидродинамическая жесткость золотника;

— уравнением расходов в гидроцилиндрах механизма управления:

$$\left(\frac{1}{K_{сж}} p + K_{ул}\right)p_{п}(t) = K_Q y(t) - f_{п} p_z(t), \quad (22)$$

где $K_{сж}$ — коэффициент сжимаемости; $K_{ул}$ — коэффициент утечек; $p_{п}(t)$ — давление в полости гидроцилиндра люльки; K_Q — коэффициент усиления по расходу второго каскада; $f_{п}$ — площадь поршня гидроцилиндра люльки; $z(t)$ — текущее положение поршня гидроцилиндра люльки;

— уравнением сил, действующих на поршень гидроцилиндра люльки насоса:

$$(m_{гц} p^2 + F_{гц} p + C_{гц})z(t) = f_{п} p_{п}(t), \quad (23)$$

где $m_{гц}$ — масса подвижных частей гидроцилиндра люльки; $F_{гц}$ — коэффициент вязкого трения в гидроцилиндре люльки; $C_{гц}$ — жесткость пружин гидроцилиндра люльки.

Угол поворота люльки насоса $\alpha_{л}(t)$ определяется выражением:

$$\alpha_{л}(t) = \frac{z(t)}{h}, \quad (24)$$

где h — плечо приложения силы гидроцилиндра.

Параметр регулирования насоса определяется по уравнению:

$$e(t) = \frac{\alpha_{\text{л}}(t)}{\alpha_{\text{лmax}}}, \quad (25)$$

где $\alpha_{\text{лmax}}$ — максимальный угол поворота люльки.

Математическая модель гидропривода с силовым цилиндром, составленная из блоков пакета Simulink на основании уравнений (3)–(25), приведена на рис. 2–9. При составлении математической модели гидропривода в пакете Simulink также учтены естественные нелинейности гидропривода: ограничение перепада давления в гидромагистралях предохранительными клапанами, ограничение перемещений заслонки и золотника механизма управления насосом. Численные значения параметров математической модели соответствуют гидроприводу, состоящему из насоса Н16РДМ и гидроцилиндра с площадью поршня 176 см². Нагрузка гидропривода характеризуется моментом инерции $J=178830$ кг·м², моментом неуравновешенности $M_{\text{нy}}=160$ кН·м и моментом трения $M_{\text{тр}}=20$ кН·м.

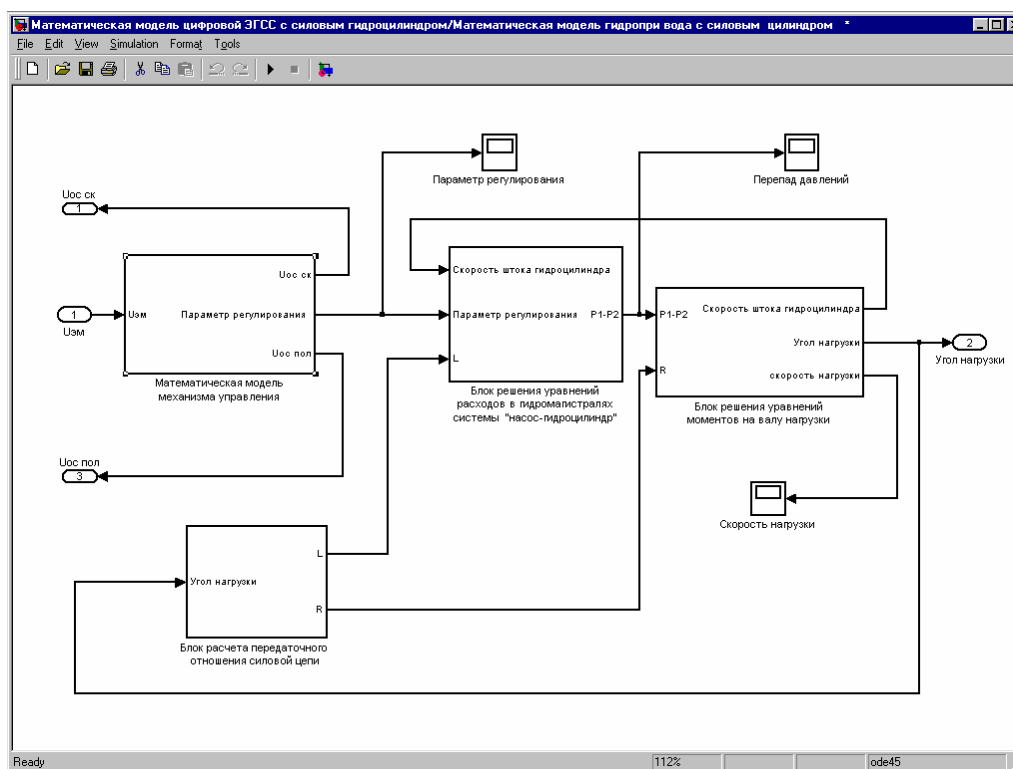


Рис. 2. Математическая модель гидропривода с силовым цилиндром.

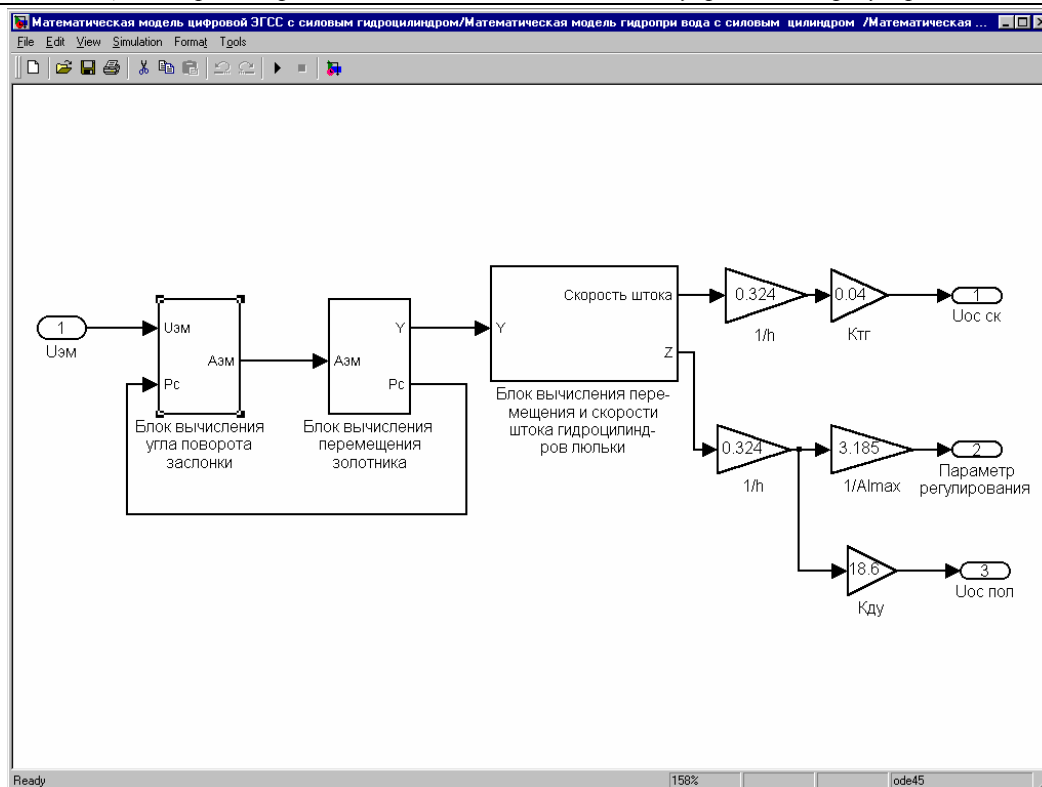


Рис. 3. Математическая модель механизма управления.

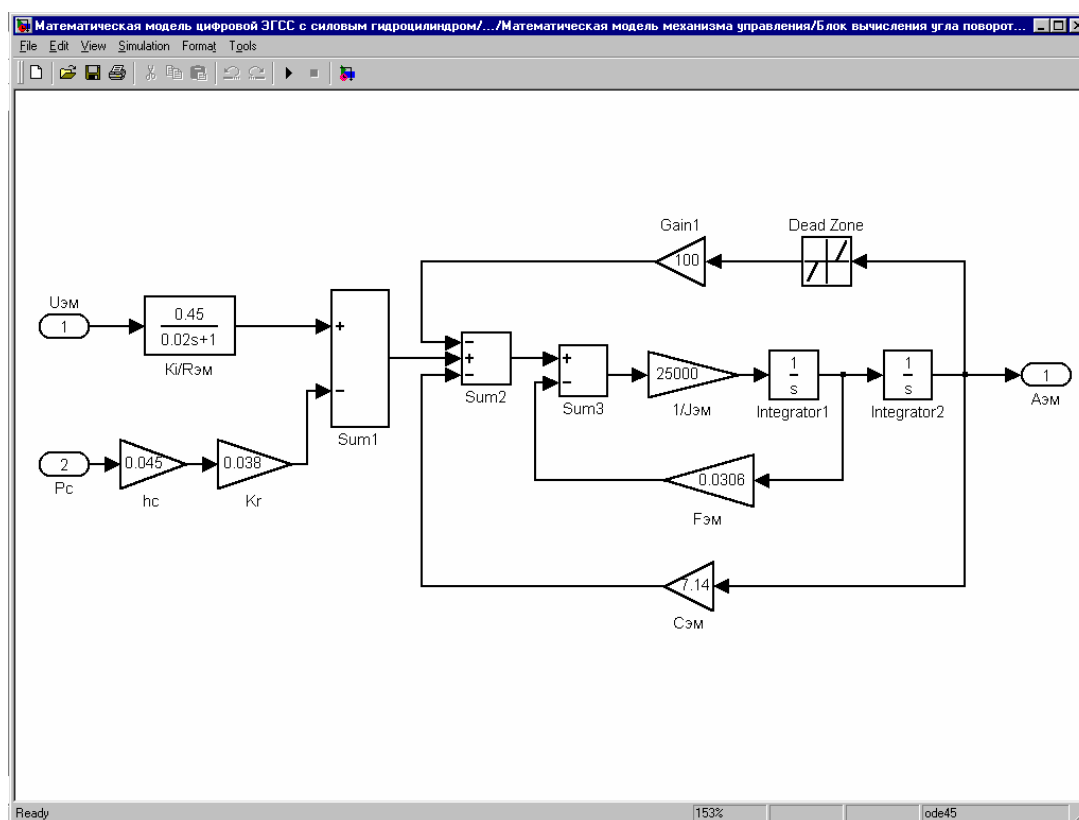


Рис. 4. Блок вычисления угла поворота заслонки.

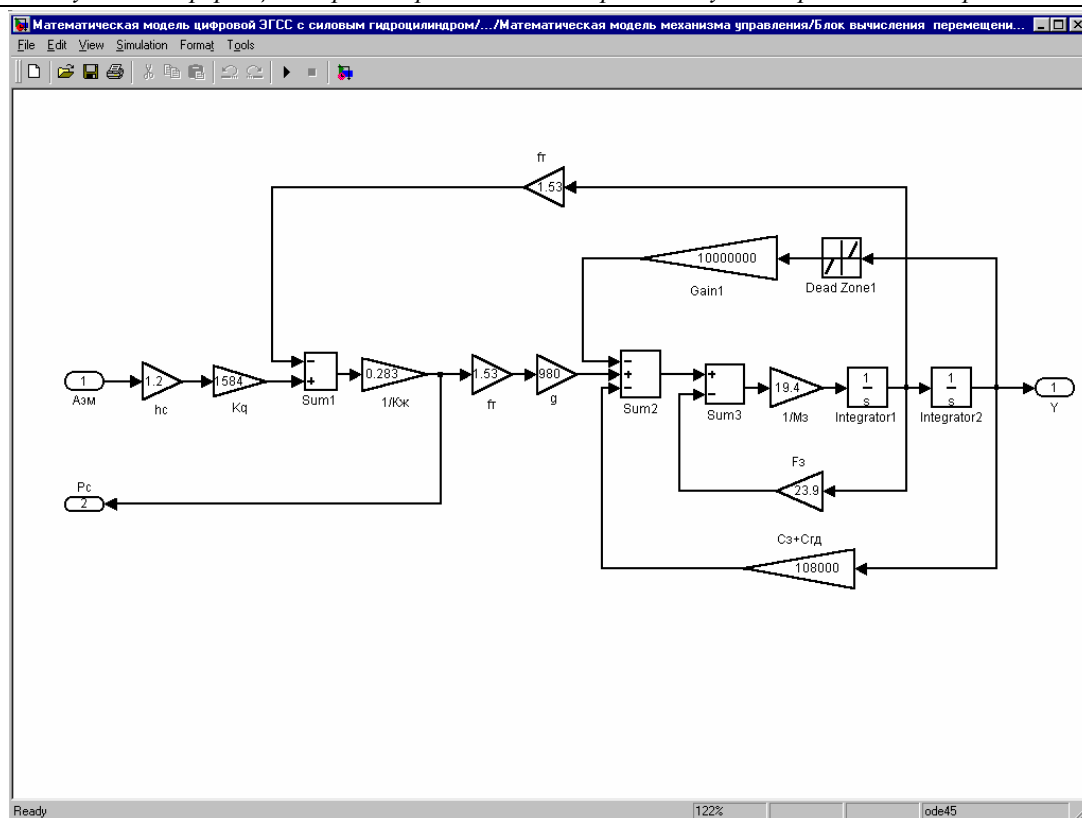


Рис. 5. Блок вычисления перемещения золотника.

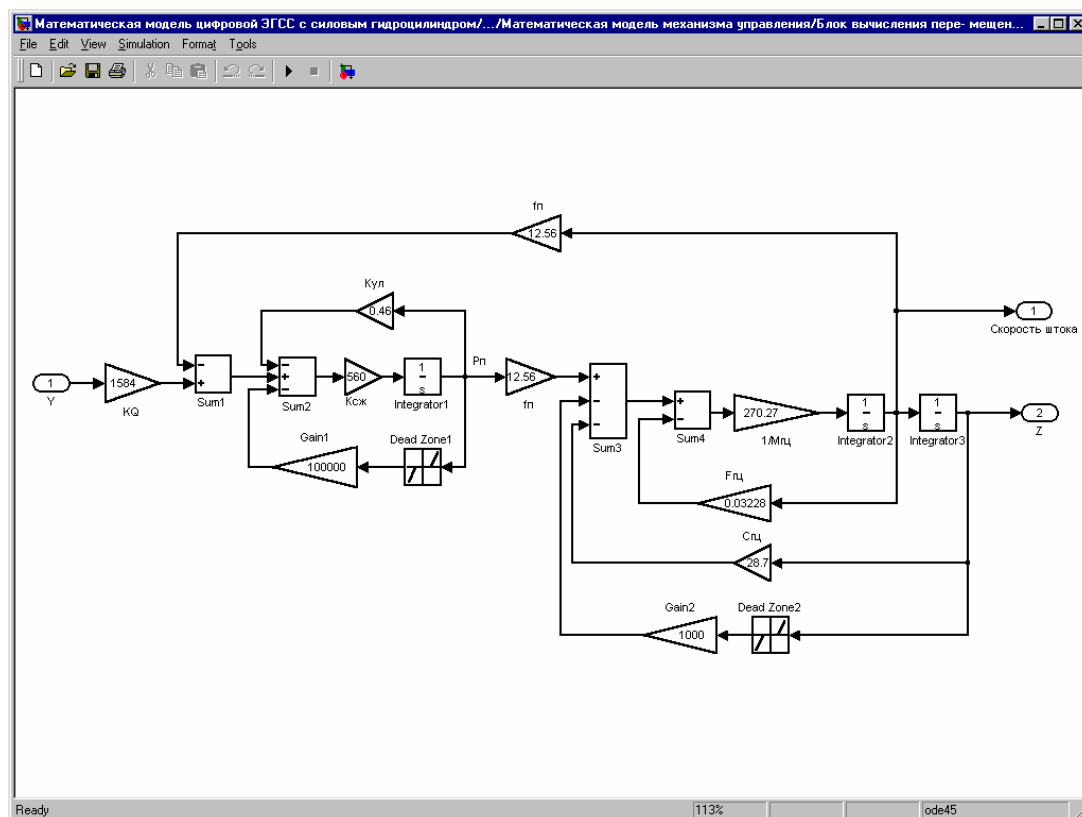
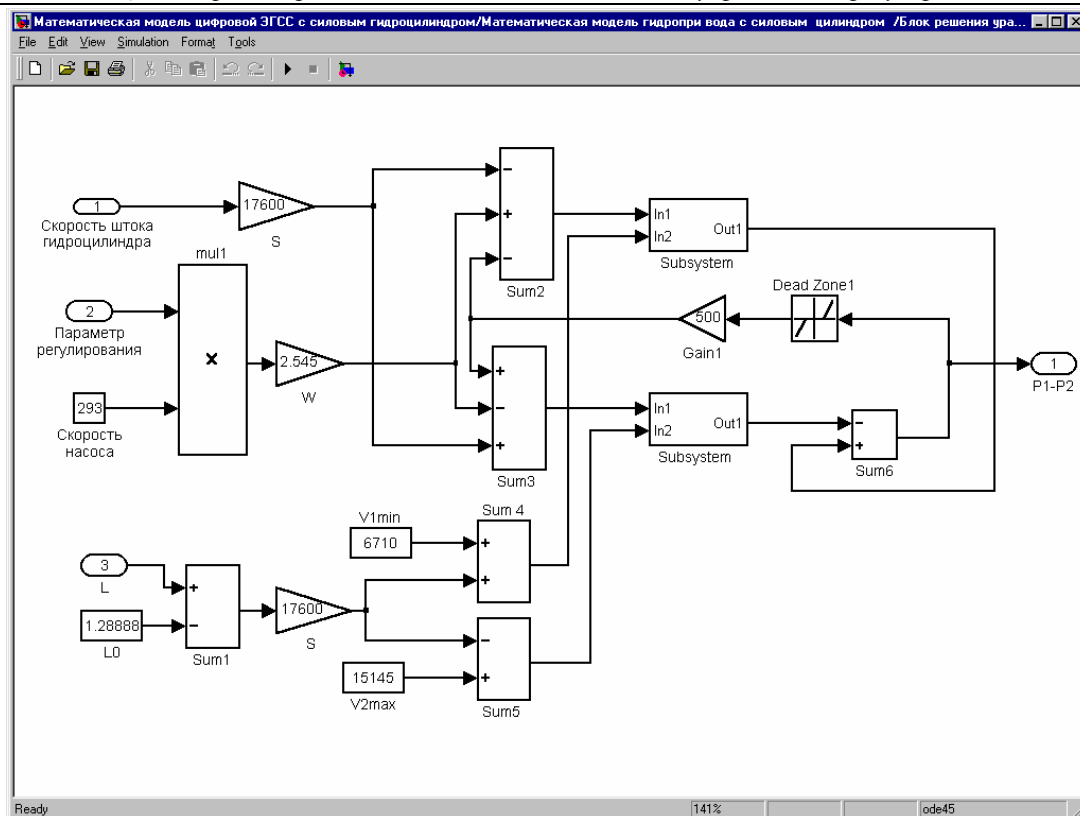
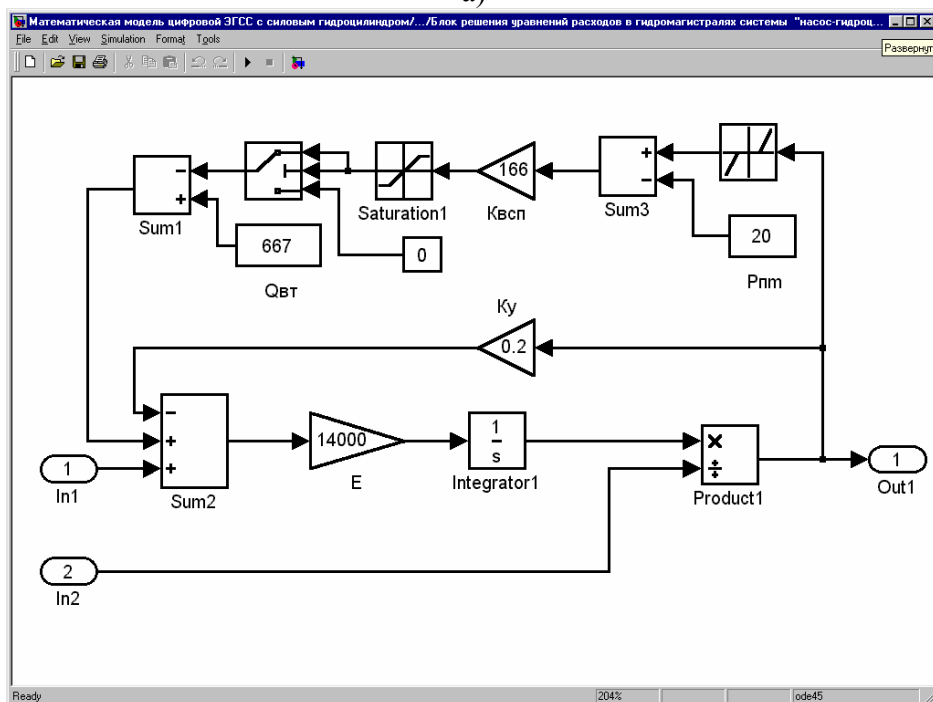


Рис. 6. Блок вычисления перемещения и скорости штока гидроцилиндров люльки.



а)



б)

Рис. 7. Блок решения уравнений расходов в магистралях системы «насос-гидроцилиндр».

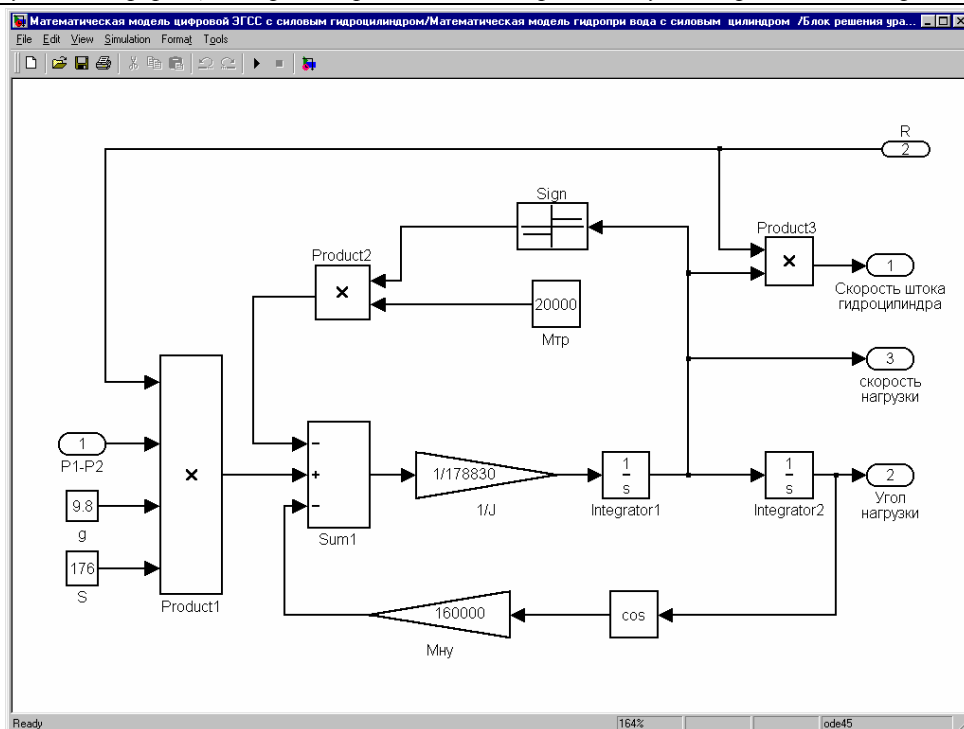


Рис. 8. Блок решения уравнений моментов на валу нагрузки.

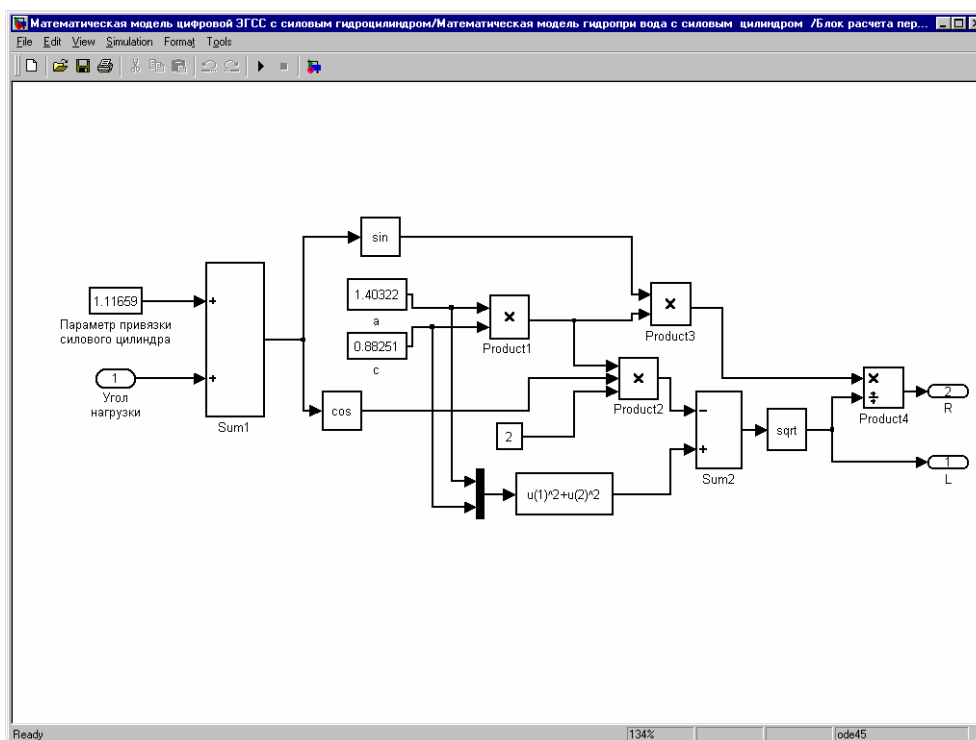


Рис. 9. Блок расчета передаточного отношения силовой цепи.

Математическая модель цифровой ЭГСС с силовым гидроцилиндром, реализованная в пакете Simulink, приведена на рис. 10. Составные части математической модели ЭГСС: алгоритм управления, реализуемый в ЭВМ, математическая модель ЦАП, математическая модель аналоговых

корректирующих устройств с входящими в них субблоками приведены на рис. 11–16.

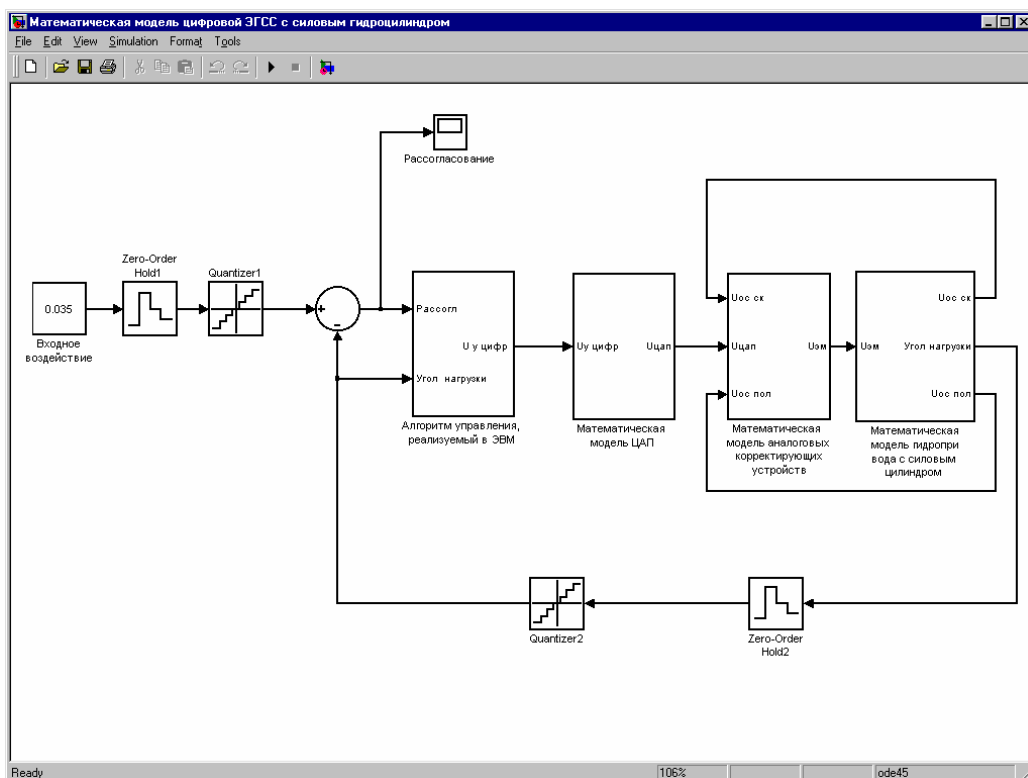


Рис. 10. Математическая модель цифровой ЭГСС с силовым гидроцилиндром.

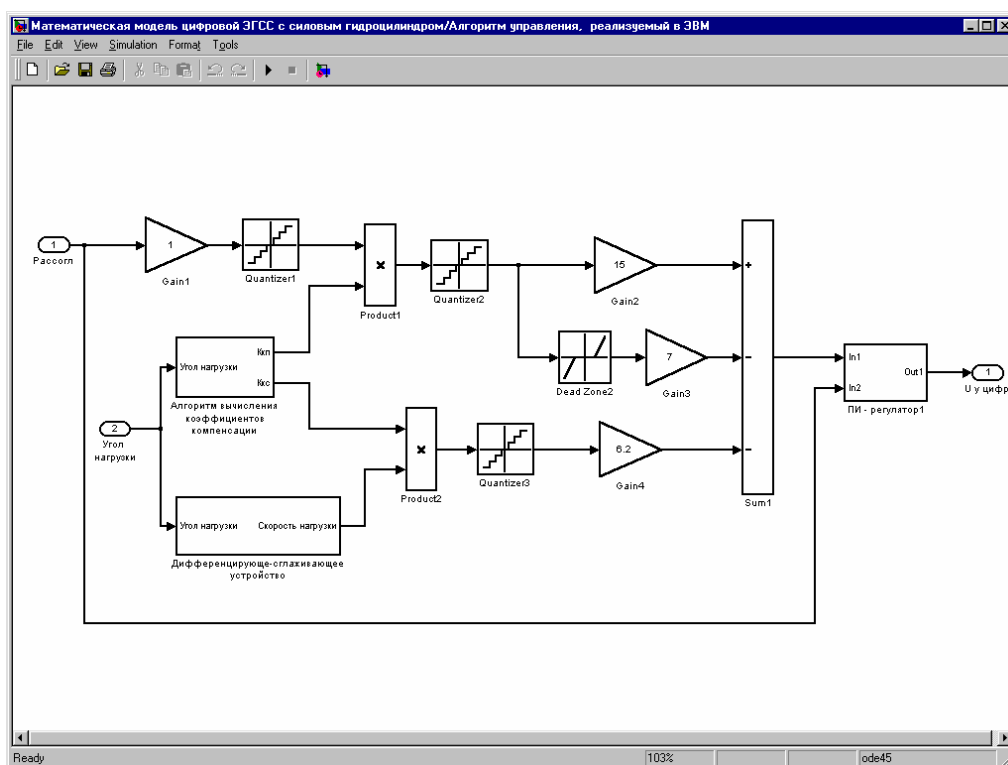


Рис. 11. Алгоритм управления, реализуемый в ЭВМ.

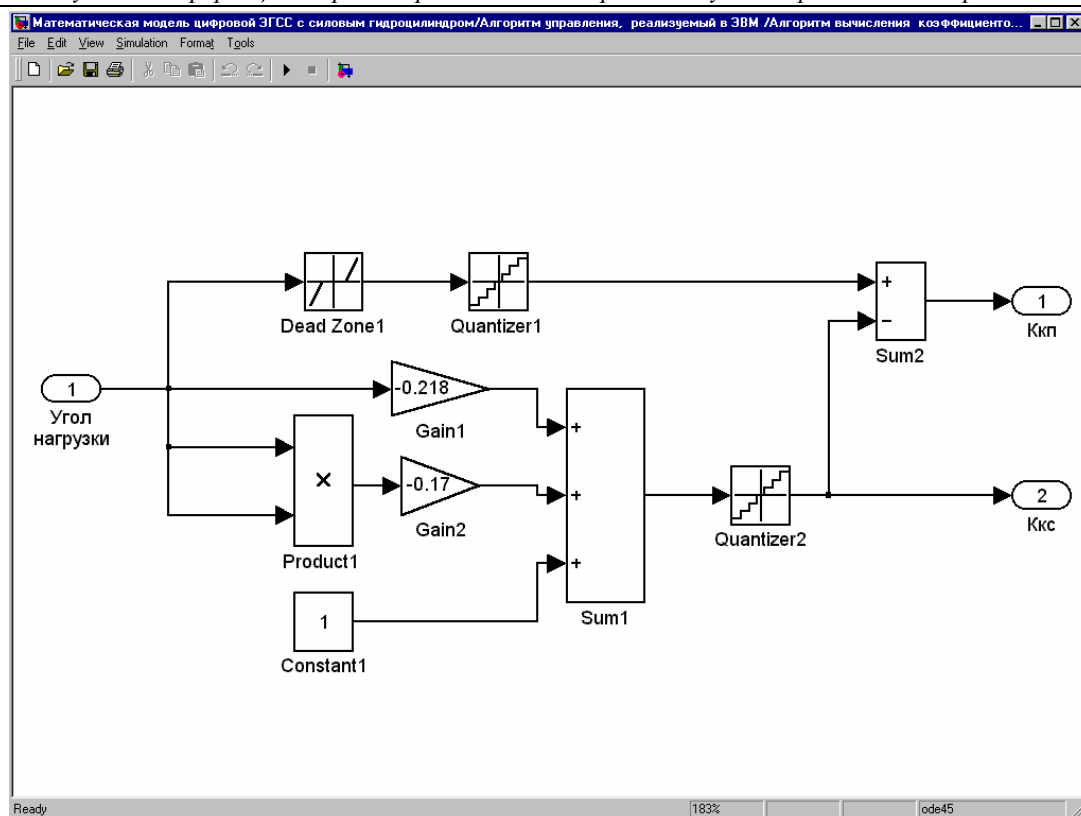


Рис. 12. Алгоритм вычисления коэффициентов компенсации.

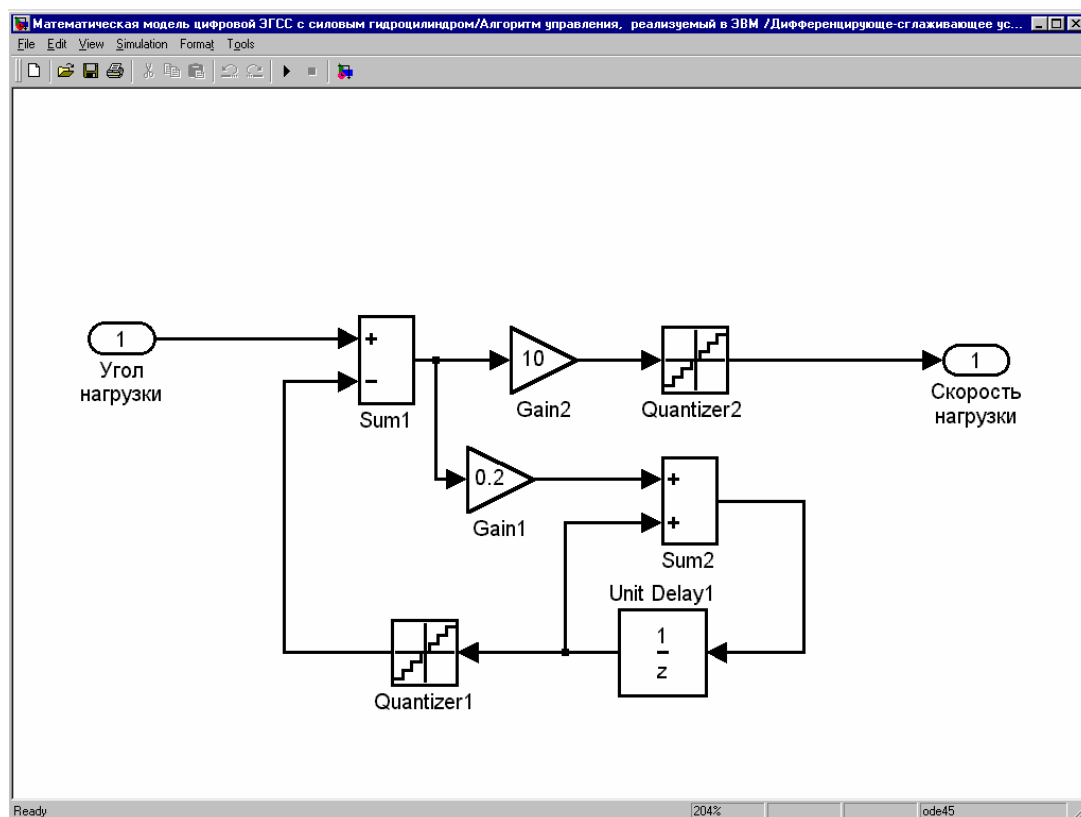


Рис. 13. Дифференцирующе-сглаживающее устройство.

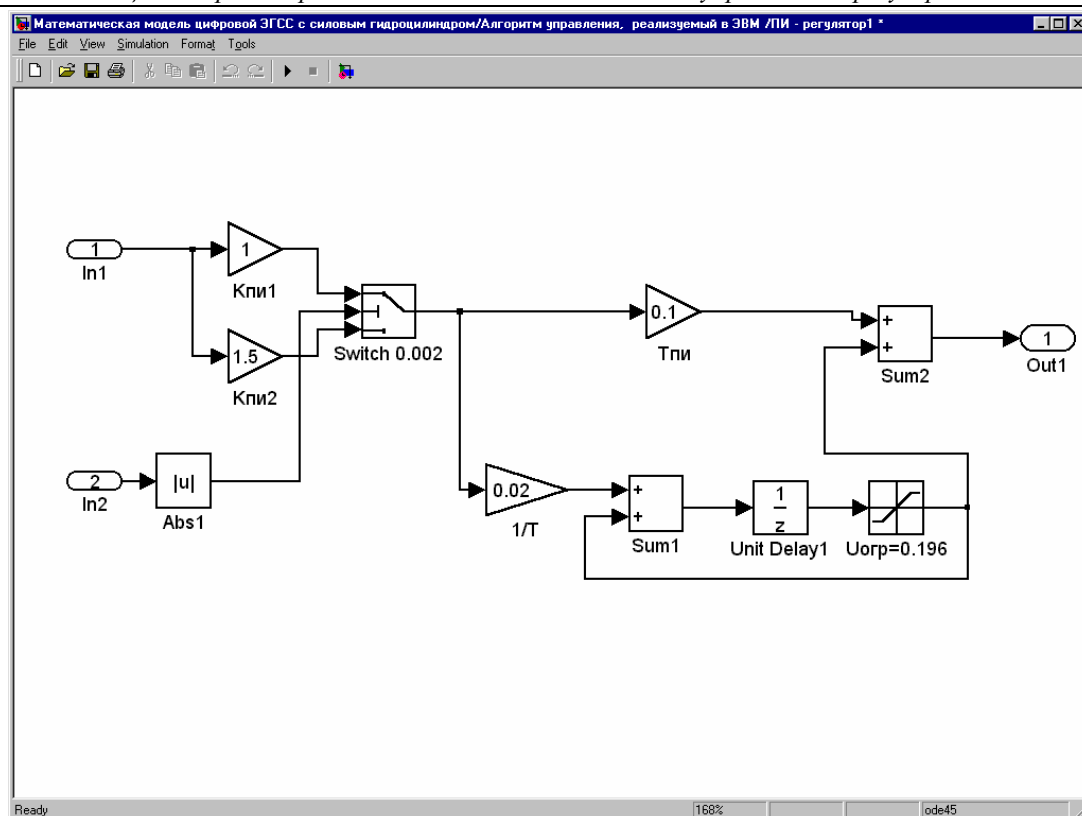


Рис. 14. Математическая модель ПИ-регулятора.

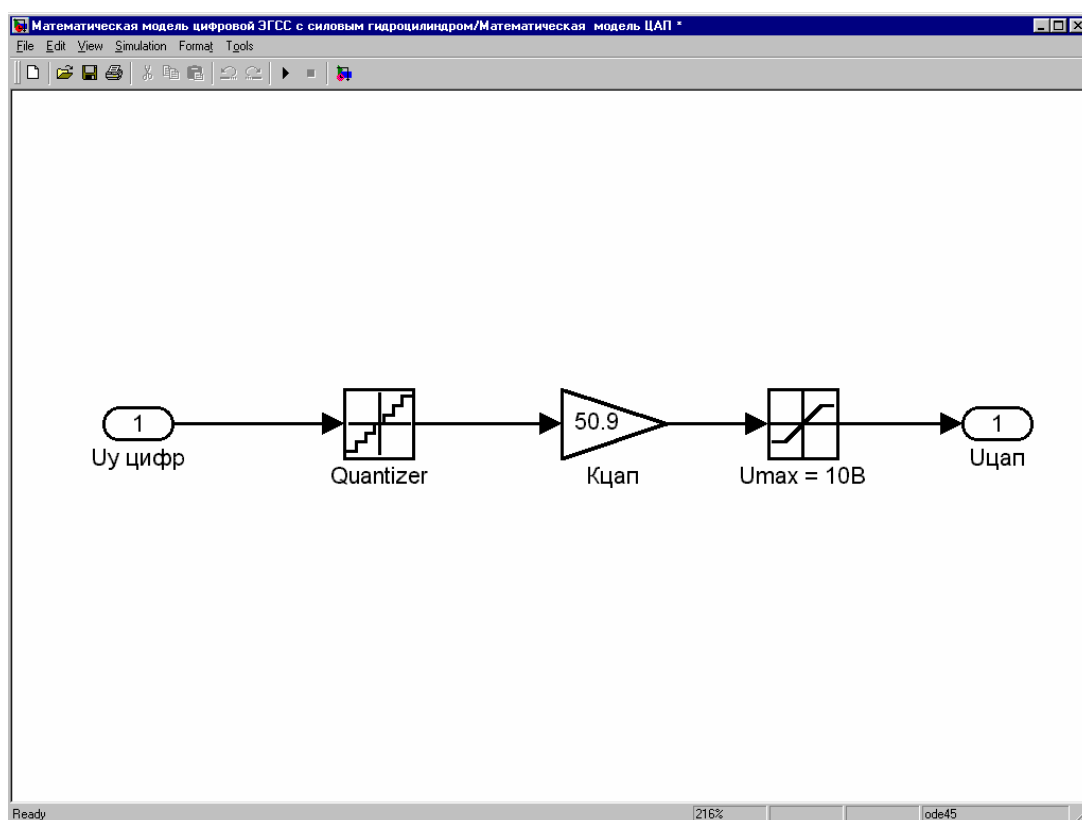


Рис. 15. Математическая модель ЦАП.

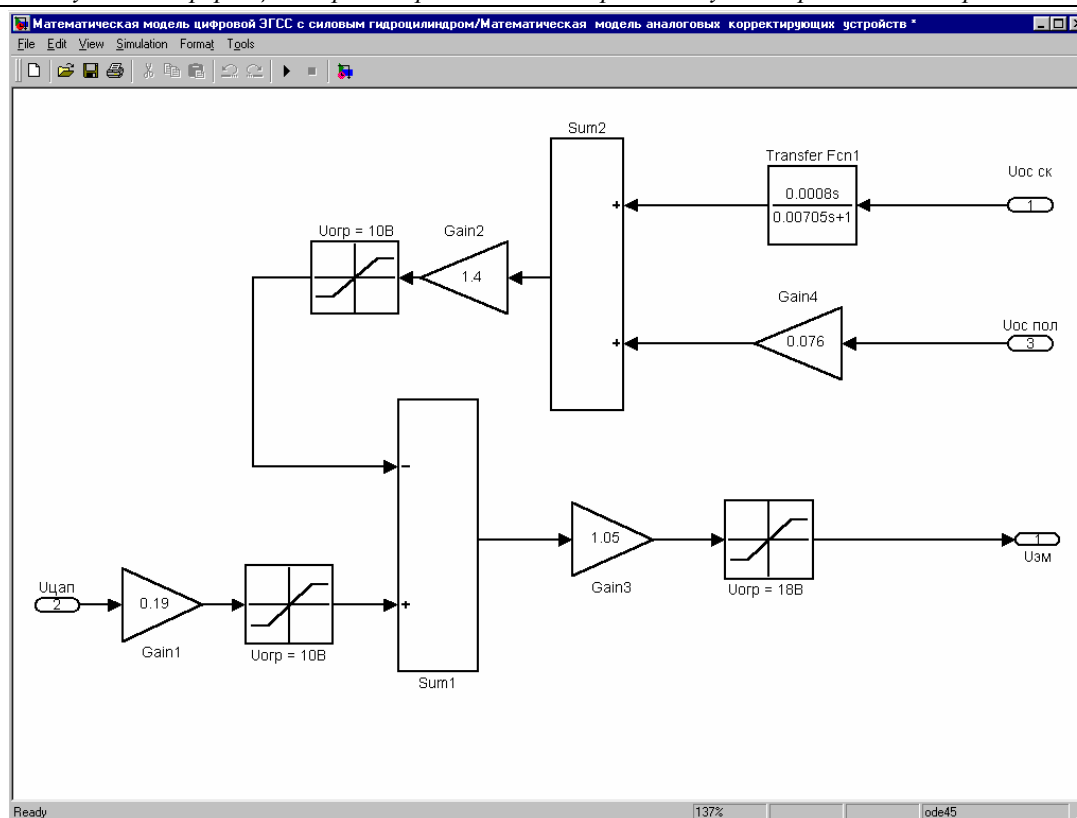


Рис. 16. Математическая модель аналоговых корректирующих устройств.

Использование пакета Simulink позволило подобрать параметры алгоритма управления, реализованного в ЭВМ, и аналоговых корректирующих устройств, обеспечивающих требуемые динамические характеристики ЭГСС. Графики переходных процессов, характеризующие динамические характеристики цифровой ЭГСС, полученные в результате расчетов с использованием пакета Simulink, приведены на рис. 17–20.

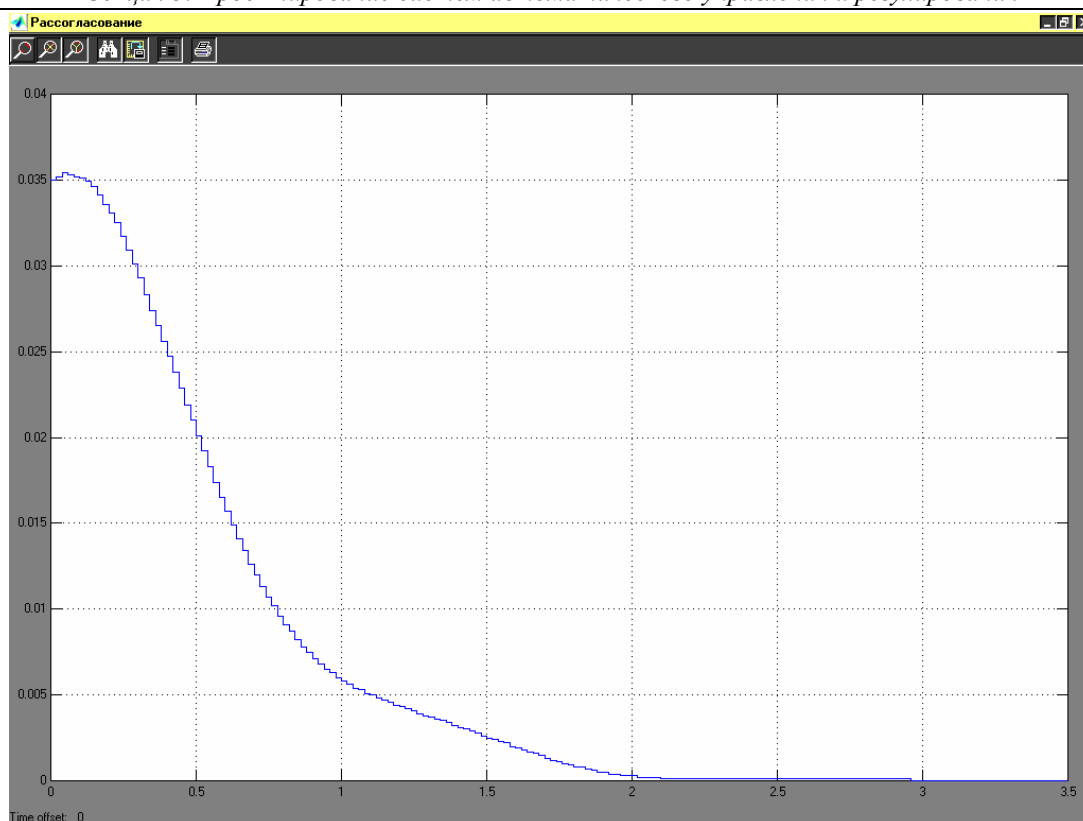


Рис. 17. График отработки рассогласования.

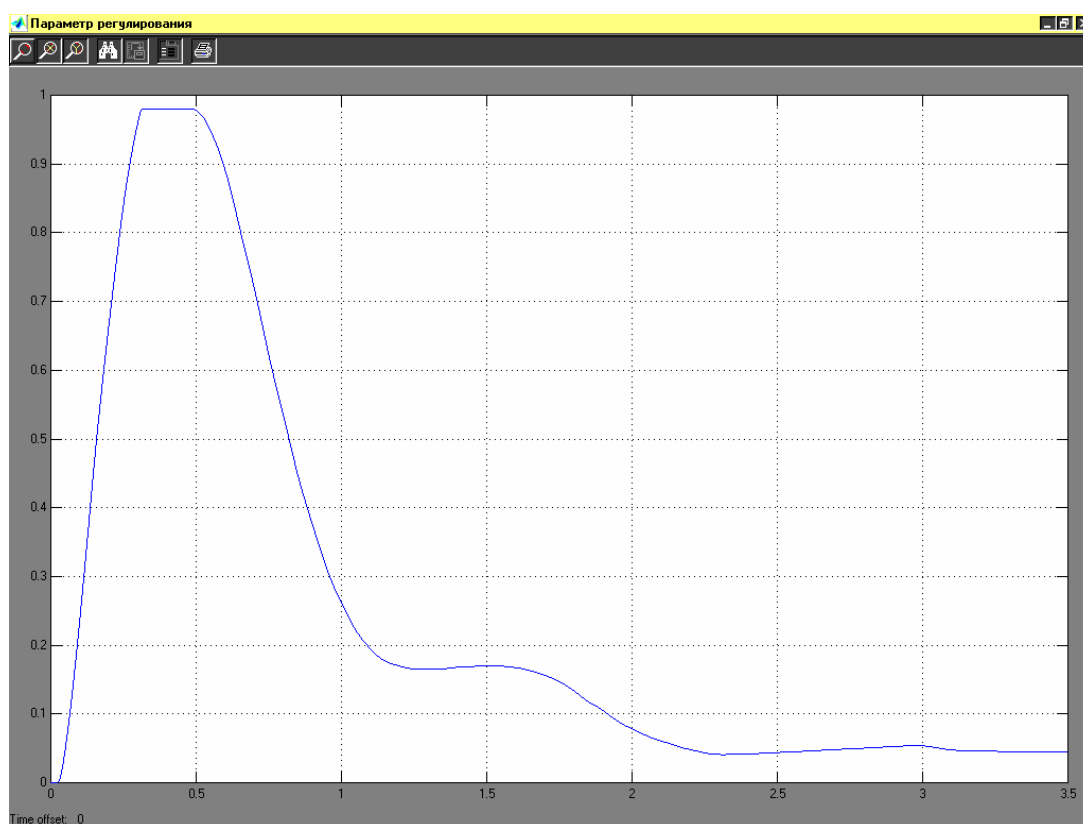


Рис. 18. Параметр регулирования насоса.

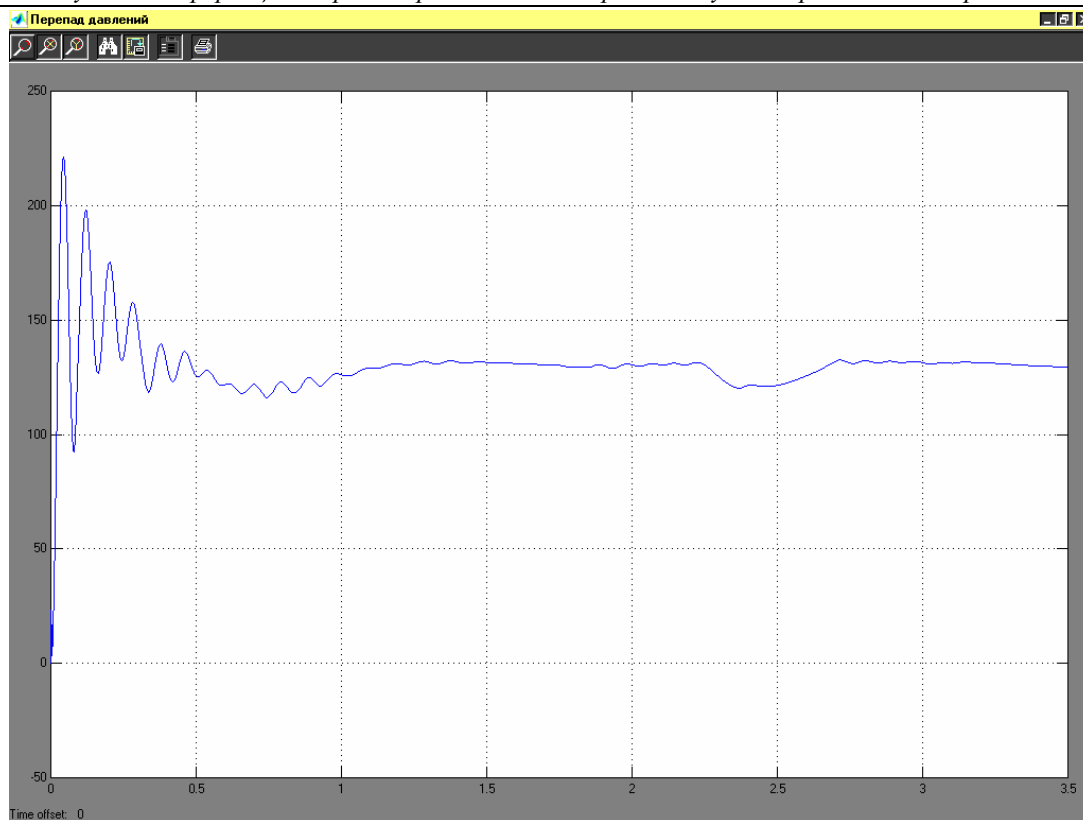


Рис. 19. Перепад давления в гидромагистралях системы «насос-гидроцилиндр».

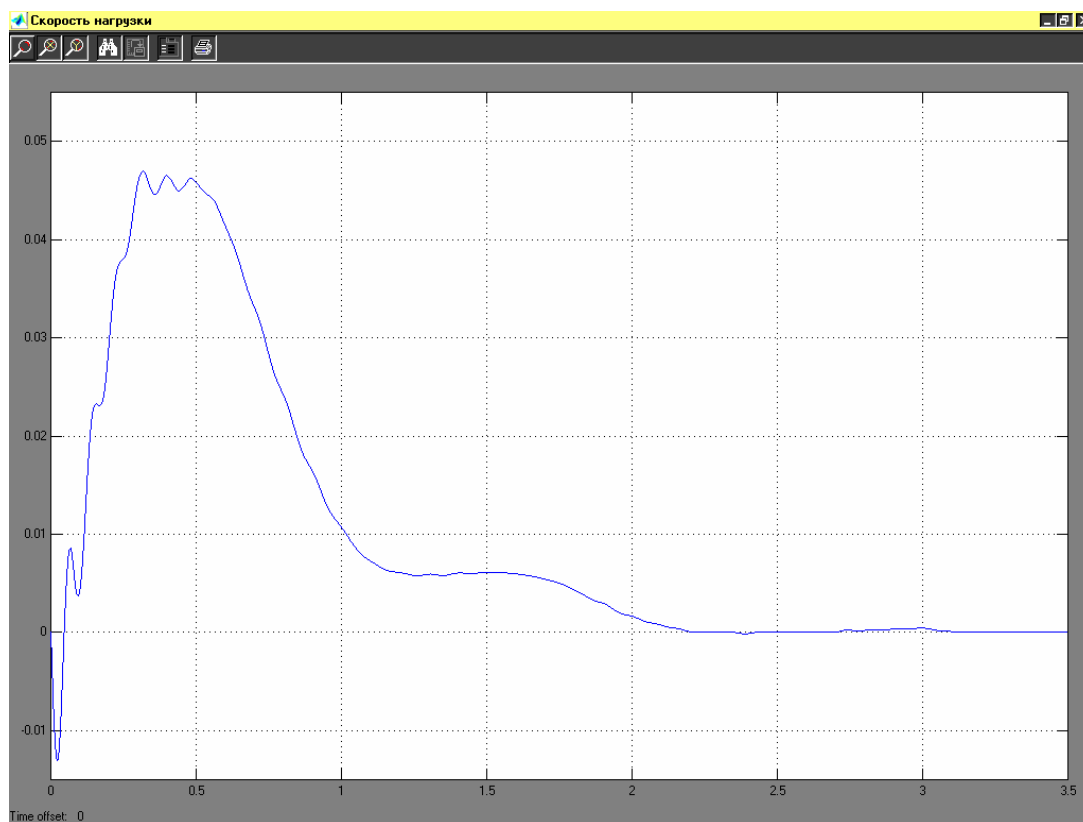


Рис. 20. Скорость движения нагрузки.

Литература

1. Баунин В. Г. Особенности построения приводов манипуляторов мобильных робототехнических комплексов // Привод и управление.— 2000.— №1.— С.15–17.
2. Баунин В. Г., Назаров Д. В., Платанный В. И. Исследование динамики электрогидравлического привода с силовым цилиндром // Управление в технических системах: Материалы науч.-тех. конф.— Ковров: КГТА, 1998.— С.68–69.
3. Следящие приводы. В 2-х кн. / Под. ред. Б. К. Чемоданова. Кн. 2.— М.: Энергия, 1976.— 384 с.

УДК 519.6

ИНТЕГРАЦИЯ MATLAB С КОНТРОЛЛЕРОМ SIMATIC И ОДНОПЛАТНЫМИ СПЕКТРОМЕТРАМИ СЕРИИ SBS

*Быстровзоров С. В., Сульженко П. С., Фадеев Г. В.,
ОАО «Машиностроительный завод», Электросталь, Московская обл.,
e-mail: yzmsz@elemash.ru*

*Дорин А. Б., Ермак М. Г.
ООО «Грин Стар Инструментс», Москва,
e-mail: grstar@mega.ru*

Открытое акционерное общество «Машиностроительный завод» — лидер в производстве ядерного топлива (ТВЭЛ — тепловыделяющих элементов для атомных электростанций, АЭС) и одно из крупнейших промышленных предприятий в России. Это предприятие, разрабатывающее и выпускающее продукцию мирового уровня; каждый десятый ТВЭЛ, работающий на АЭС всего мира, произведен в Электростали. Значительное внимание на предприятии уделяется приборному контролю, как в процессе производства — технологическому — так и выходному, при предъявлении продукции заказчику. Общество с ограниченной ответственностью «Грин Стар Инструментс» — ведущий российский производитель ядерно-физической измерительной аппаратуры, многолетний партнер «Машиностроительного завода» в области автоматизации производства. В настоящем докладе сообщается о решении двух задач, связанных между собой ориентацией на систему MATLAB и общей направленностью на применение их результатов для развития сканеров ТВЭЛ [1].

Первая из них — организация связи между системой MATLAB и контроллером SIMATIC фирмы SIEMENS. На «Машиностроительном заводе» накоплен большой и успешный опыт применения этих контроллеров для управления достаточно сложными исполнительными механизмами. Контроллеры отслеживают состояние датчиков положения (состояния), включают в требуемом режиме (и выключают, разумеется) шаговые и реверсивные двигатели, управляют подачей сжатого воздуха в пневматические системы и т. д. Пример установки, управляемой контроллером SIMATIC — рис. 1.



Рис. 1. Сканер ТВЭЛ КТС-407.

Типичная программа контроллера представляет из себя совокупность блоков — «обработчиков», содержание отдельного блока может быть довольно сложным. Например: проверить, какова исходное состояние всех исполнительных устройств (конфигурация); если конфигурация «правильная», включать в определенной последовательности исполнительные механизмы, отслеживая при этом изменения конфигурации в ожидании наступления некоторого события. Иногда на контроллер возлагается и обработка всех результатов измерений с выдачей результата; однако чаще эти операции возлагаются на отдельную (центральную) программу. Удобно организовывать обмен данными между контроллером и центральной программой посредством COM-технологии. А в тех нередких случаях, когда центральной программе требуется выполнять серьезные вычисления, естественно программировать непосредственно на МАТЛАБ'е, используя его вычислительные возможности. Процедура МАТЛАБ «actxserver» предоставляет, вообще говоря, доступ к интерфейсу контроллера:

```
>> pt = actxserver ('SiemensHMI.PTRT')
pt =
    COM.siemenshmi.ptrt
>> invoke(pt)
    GetInstance = [string, string, handle] GetInstance(handle, string, string)
    ShowWindow = void ShowWindow(handle, int32)
    Load = void Load(handle, string, int32)
    Quit = void Quit(handle)
>> Load(pt, 'C:\SIEMENS\PROTOOL\work\otmer200\TDOP\PRO.fwd', 0)
>> s1 = 'VAR'
s2 = 'Len_Stolb'
s1 =
    VAR
s2 =
    Len_Stolb
>> [s3, s4, var] = GetInstance(pt, s1, s2)
??? Invalid handle object.
```

Однако, как видно, самая полезная функция оказалась неработоспособной. Мы вышли из положения, написав wrapper на C++, использование которого позволило организовать требуемый обмен данными:

```
>> pt = actxserver ('PtToML.PTML.1')
Load(pt,'C:\Siemens\Step7\S7proj\Rar_2\TDOP\PRO.fwd', 1)
pt.ClassName = 'VAR'
pt.InstanceName = 'C_Mode'
C_Mode = pt.Instance;
pt =
    COM.pttoml.ptml.1
pt =
    COM.pttoml.ptml.1
pt =
    COM.pttoml.ptml.1
invoke(C_Mode)
    SetValue = void SetValue(handle, Variant, int32, int32)
    GetValue = [Variant(Pointer), int32] GetValue(handle)
    GetValueType = int16 GetValueType(handle)
    SetIndexedValue = void SetIndexedValue(handle, int32, Variant)
    GetIndexedValue = Variant(Pointer) GetIndexedValue(handle, int32)
    GetMaxIndex = int32 GetMaxIndex(handle)
>>
>> SetValue(C_Mode,1,0,1)
C_Mode.Value
ans =
    1
>> SetValue(C_Mode,0,0,1)
>> C_Mode.Value
ans =
    0
```

Вторая задача — интеграция системы МАТЛАБ с одноплатными спектрометрами фирмы «Грин Стар». Спектрометры (другое название — процессор импульсных сигналов) представляет из себя плату расширения, стандарта ISA или PCI — рис. 2.

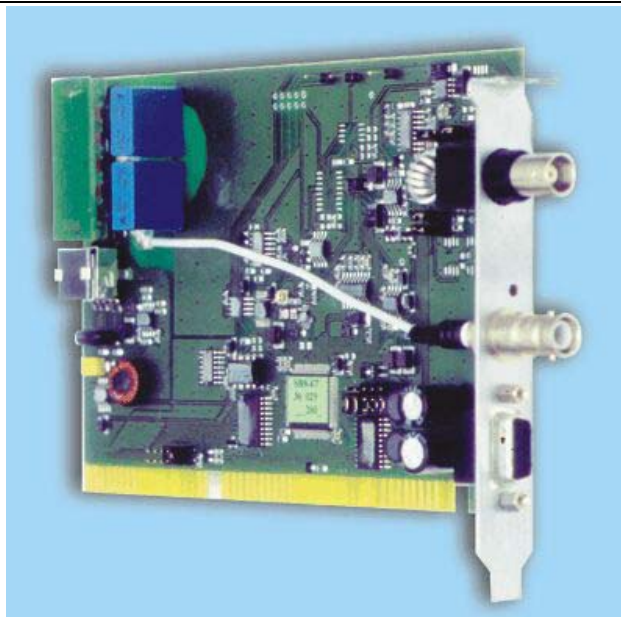


Рис. 2. Быстродействующий одноплатный спектрометр SBS-67.

Представленный на рисунке прибор разработан по заказу «Машиностроительного завода» специально для применений, требующих высокой пропускной способности и при высоких входных нагрузках. Может применяться как с полупроводниковым, так и со сцинтилляционным детектором излучений. При использовании сцинтилляторов на основе NaI (TI) работоспособность сохраняется при нагрузках до $2,5 \cdot 10^6$ имп/с, а максимальная пропускная способность $2 \cdot 10^5$ имп/с (определяется только временем высвечивания сцинтиллятора). Процессор имеет широкое применение в многоканальных системах. Фактически разработано целое семейство спектрометров — SBS-59, 67, 70. Общее для них всех программное обеспечение позволяет объединять в одной системе (компьютере) до 32-х спектрометров — впрочем, шасси с более чем двадцатью слотами нам не встречались. Программное обеспечение содержит, во-первых, собственную оболочку, т. н. эмулятор анализатора (рис. 3).

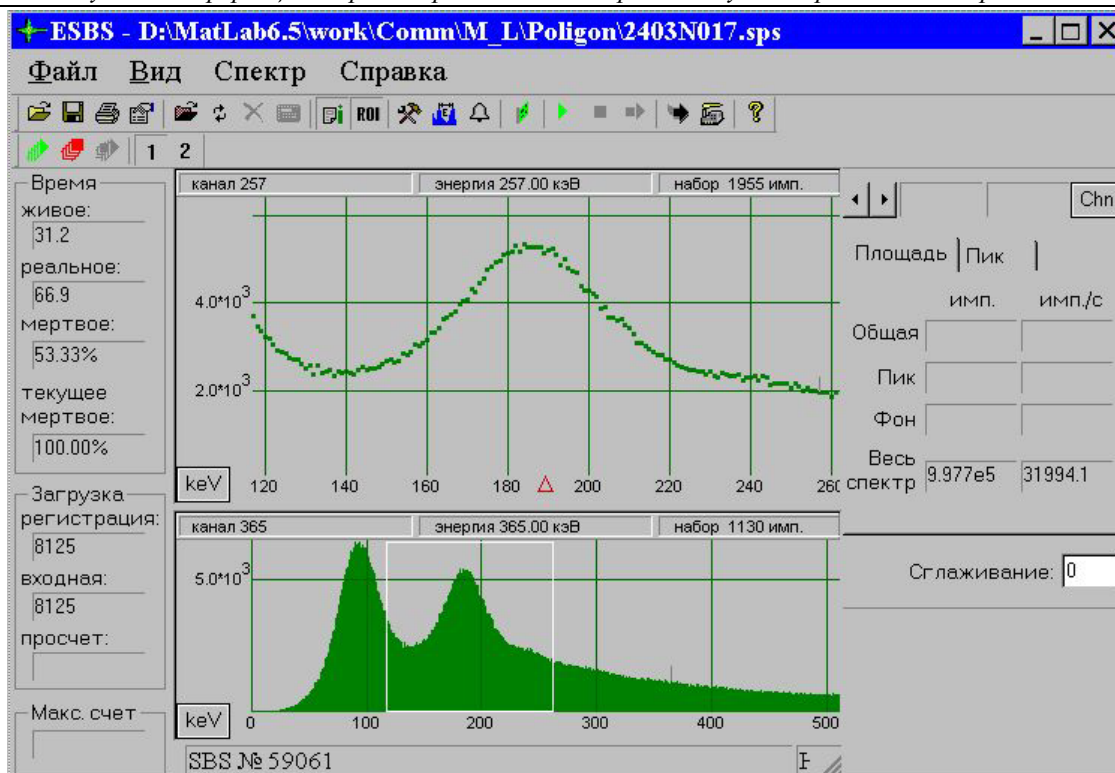


Рис. 3. Эмулятор анализатора.

Эта оболочка позволяет в частности, использовать спектрометр традиционным образом — как лабораторный. Для нас, однако, гораздо важнее то обстоятельство, что вместе с ним поставляется библиотека управления. Это совокупность функций на C++, которые могут быть вызваны из любой программы, причем первая же вызванная функция загружает драйвер спектрометра. Базовые функции библиотеки мы перетранслировали к виду *tex-dll*, что позволило нам управлять многоканальной спектрометрической системой непосредственно из среды MATLAB — и в любой момент получать в рабочую область MATLAB требуемую спектрометрическую информацию:

```
>> sbshvon(0,1100)
      Sbs00 HVOned % Подняли высокое напряжение
>> a=sbsgetspectra(0); bar(a)
      Sbs00 GetSpectra mrows=512
>> hold on % Получили спектр и построили (bar) график
>> a=sbsgetspectra(0); plot(a,'r')
      Sbs00 GetSpectra mrows=512
% Получили спектр через некоторое время,
% и построили (plot) график
>> sbsstop
      Sbs00 Stopped % Остановили набор
>> sbsgetgain(0)
??? Недостаточно выходных аргументов. % Ошибка, намеренно.
```

Ошибка в ==> D:\MATLAB6.5\work\Comm\M_L\Poligon\SBSGetGain.dll

```
>> g=sbsgetgain(0)
```

```
Sbs00 GetGain *pGain=60.000000
```

% Теперь — правильно. Получаем текущее значение усиления.

```
g =
```

```
60
```

```
>> sbssetgain(0,100)
```

```
Sbs00 SetGain *pGain=100.000000
```

```
>> g=sbsgetgain(0)
```

```
Sbs00 GetGain *pGain=100.000000
```

```
g =
```

```
100
```

>> % Изменили усиление и убедились в этом.

Набранные спектры представлены на рис. 4.

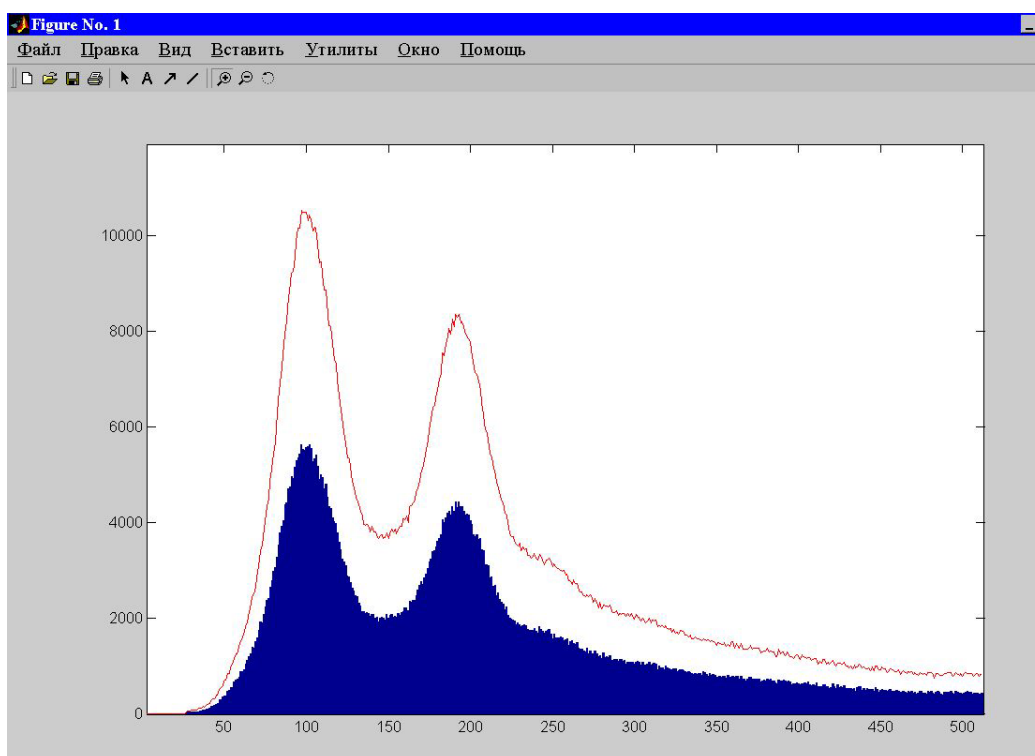


Рис. 4. Спектры, построенные во время проведенной сессии.

Проведенная работа является, на наш взгляд, базой для разработки сканирующих систем с опорой на МАТЛАБ.

Литература

1. Быстровзоров С. В., Шульман Ю. С., Сульженко П. С., Черевик В. М., Новикова И. В., Фадеев Г. В. Российские сканеры ТВЭЛ: достижения, проблемы, перспективы // Спектрометрический анализ. Аппаратура и обработка данных на ПЭВМ.— Обнинск: ГЦИПК, 2002.

УДК 517.977.5

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО СИНТЕЗА В СРЕДЕ MATLAB

Веремей Е. И.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
e-mail: veremei@vrm.apmath.spbu.ru*

1. Введение

При рассмотрении практических вопросов исследования, проектирования и компьютерного моделирования систем управления динамическими объектами широко используют теорию среднеквадратичной оптимизации. В ее основе лежат математические методы и алгоритмы поиска линейных регуляторов, обеспечивающих минимум среднеквадратичных функционалов для систем, подверженных воздействию стационарных внешних возмущений случайного характера.

Несмотря на относительную грубость комплекса используемых математических моделей, этот подход широко распространен в силу своей достаточной адекватности объективной реальности, что подтверждается богатым опытом его практического применения. Даже в самых сложных случаях среднеквадратичная оптимизация дает определенную информацию о свойствах объекта, которая может быть полезной при использовании более тонких и глубоких методов теории управления.

В связи с теоретической и практической значимостью данного направления, начиная с 40-х годов прошлого века, ему посвящалось большое количество опубликованных научных работ, среди которых широкую известность приобрели такие монографии, как [1]–[4]. Особая роль принадлежит циклу работ, представленному книгой [5]. Его авторы сформировали эффективный единый подход к решению ряда задач среднеквадратичной оптимизации. Определенное развитие этого подхода было предложено в статьях [6]–[8] на основе специальной формы представления оптимальных решений, упрощающей их качественное исследование и численный поиск.

В современной трактовке формализованных задач о нахождении стабилизирующих законов управления особое внимание уделяется прикладной ветви теории оптимизации по нормам пространств Харди H_2 и H_∞ . Аналитические и численные методы этой теории применительно к проблемам управления достаточно широко представлены в ряде известных монографий, в частности — в работах [9]–[11].

Высокоэффективная реализация указанных методов осуществлена в математической среде MATLAB. Соответствующее программное обеспечение входит в состав трех пакетов прикладных программ (ППП): μ -Analysis and Synthesis Toolbox (μ -Tools), Robust Control Toolbox (RCT) и LMI Control Toolbox (LMICT).

Все указанные пакеты в той или иной мере связаны с основным ППП Control System Toolbox, представляющим в среде MATLAB инструментарий для моделирования, анализа и синтеза систем управления. Однако в отличие от Control System Toolbox, где в основном привлекаются классические инженерные и математические методы теории управления, пакеты рассматриваемой здесь группы базируются на современных подходах, получивших существенное развитие за последние десятилетия.

Инструментальные средства пакетов данной группы в основном реализуют вычислительные методы оптимизации динамических систем по нормам пространств H_2 и H_∞ . Эти методы используются для упрощения математических моделей объектов, для синтеза оптимальных замкнутых систем и для решения задач по обеспечению робастной устойчивости и робастного качества.

В связи с наличием весьма эффективной алгоритмической и программной поддержки задач H_2 и H_∞ -оптимизации возникает естественный вопрос о возможности ее использования и для решения задач среднеквадратичного синтеза. В теоретическом аспекте эта проблема обсуждается сравнительно давно — в качестве примеров можно привести работы [8] и [12], а современный взгляд на историю вопроса в известной мере представлен в монографии [14].

Основа связи между двумя рассматриваемыми направлениями состоит в том, что базовая задача среднеквадратичного синтеза является частной ситуацией, относящейся к теории H_2 -оптимизации линейных систем управления. В связи с этим общая идеология поиска элементов с минимальными нормами в пространстве H_2 может быть использована при формировании специализированных алгоритмов среднеквадратичного синтеза. Однако альтернативный подход с непосредственным использованием универсальных средств H_2 -теории, реализованных в среде MATLAB, здесь не возможен, поскольку ситуация носит существенно вырожденный характер по отношению к этим средствам.

Тем не менее, существует принципиальная возможность преодоления указанной трудности за счет регуляризации задачи среднеквадратичного оптимального синтеза.

В связи с отмеченными обстоятельствами целями данной работы являются:

а) формирование специализированного алгоритма решения SISO задачи среднеквадратичного синтеза;

б) регуляризация задачи для привлечения к ее решению универсальных средств H_2 -оптимизации среды MATLAB;

в) выявление особенностей использования различных методов, реализованных в среде, и сопоставление специализированного и универсального подходов.

2. Постановка SISO задачи среднеквадратичного синтеза

Рассмотрим LTI модель объекта управления, представленную дифференциальным уравнением

$$A(p)y = B(p)u + \varphi(t), \quad (1)$$

где y — скалярная измеряемая переменная, u — скалярное управление, $A(p)$, $B(p)$ — полиномы степеней n и $m \leq n-1$ соответственно от оператора дифференцирования $p = d/dt$, $\varphi(t)$ — внешнее скалярное возмущающее воздействие. В качестве возмущений будем принимать случайные стационарные функции времени, удовлетворяющие эргодической гипотезе и имеющие нулевое математическое ожидание.

Наряду с уравнением объекта, будем рассматривать математическую модель регулятора

$$u = W(p)y, \quad (2)$$

где $W(p) = W_1(p)/W_2(p)$, W_1, W_2 — полиномы.

Поскольку задание регулятора (2) в минимальной реализации однозначно определяется его передаточной функцией $W(s)$, в дальнейшем будем отождествлять множества регуляторов вида (2) и их передаточных функций.

В качестве допустимого множества будем принимать совокупность $\Omega^* \subset \Omega$ стабилизирующих регуляторов:

$$\Omega^* = \left\{ W \in \Omega : \operatorname{Re} \delta_i < 0, \Delta(\delta_i) = 0, \Delta(s) = A(s)W_2(s) - B(s)W_1(s), \right. \\ \left. i = \overline{1, \deg \Delta(s)} \right\}, \quad (3)$$

где Ω — множество дробно-рациональных функций с вещественными коэффициентами, $\Delta(s)$ — характеристический полином замкнутой системы.

Для оценки качества процессов введем в рассмотрение два варианта контролируемых переменных:

а) векторную переменную

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ ku(t) \end{pmatrix}; \quad (4)$$

б) скалярную переменную

$$z(t) = \sqrt{y^2(t) + k^2 u^2(t)}. \quad (5)$$

Здесь k — некоторая положительная константа ($k \in [0, \infty)$).

С использованием указанных переменных можно ввести числовые характеристики качества процессов управления в замкнутой системе (1), (2). В частности, на ее движениях можно задать следующие среднеквадратичные функционалы:

$$I_{\xi} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \xi^T(t) \xi(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \text{tr}[\xi(t) \xi^T(t)] dt, \quad (6)$$

$$I_z = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} z^2(t) dt. \quad (7)$$

С учетом (4) и (5) видно, что значения этих функционалов совпадают и при прочих равных однозначно определяются заданием передаточной функции регулятора (2):

$$I_{\xi} = I_z = I_2(W) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [y^2(t) + k^2 u^2(t)] dt = \langle y^2 \rangle + k^2 \langle u^2 \rangle. \quad (8)$$

При этом традиционная постановка задачи среднеквадратичной оптимизации выглядит следующим образом: на множестве Ω^* стабилизирующих регуляторов вида (1) необходимо найти такой, который доставляет минимум среднеквадратичному функционалу $I_2(W)$ (8):

$$I_2(W) \rightarrow \min_{W \in \Omega^*}. \quad (9)$$

Замечание: известно, что точная нижняя граница функционала I_2 на указанном множестве достигается.

Теперь сформулируем постановку этой же задачи в терминах H_2 теории. Вначале обратимся к функционалу $I_{\xi}(W)$ (6) и воспользуемся следующей формулой из теории случайных стационарных процессов:

$$\langle \xi^T \xi \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \text{tr}[S_{\xi}(s)] ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[S_{\xi}(\omega)] d\omega, \quad (10)$$

где S_{ξ} — матрица спектральных плотностей векторной переменной $\xi(t)$. Эта переменная есть результат прохождения скалярного стационарного сигнала $\varphi(t)$ через линейную замкнутую систему с передаточной матрицей $H(s) = (F_y(s) \quad kF_u(s))^T$, где

$$F_y(s) = \frac{1}{A(s) + B(s)W(s)}, \quad F_u(s) = \frac{W(s)}{A(s) + B(s)W(s)}. \quad (11)$$

При этом спектральная плотность сигнала $\xi(t)$ определяется выражением

$$S_{\xi}(s) = H(-s) S_{\varphi}(s) H^T(s), \quad (12)$$

где $S_{\varphi}(s) \equiv S_1(s) S_1(-s)$ — спектральная плотность входного сигнала $\varphi(t)$, причем $S_1(s)$ — рациональная дробь, имеющая все нули и полюса в открытой левой полуплоскости.

Подставляя (12) в (10), получим

$$\begin{aligned}\langle \xi^T \xi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H(-j\omega) S_1(j\omega) S_1(-j\omega) H^T(-j\omega)] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [S_1(-j\omega) H^T(-j\omega) H(-j\omega) S_1(j\omega)] d\omega = \|HS_1\|_2^2\end{aligned}$$

в соответствии с определением взвешенной H_2 нормы матрицы $H(s)$ с весом $S_1(s)$.

Теперь отметим, что для случайных стационарных процессов, удовлетворяющих эргодическому свойству, выполняются равенства

$$I_{\xi}(W) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \xi^T(t) \xi(t) dt = \langle \xi^T \xi \rangle = I_2(W),$$

откуда следует, что

$$I_2(W) = \|HS_1\|_2^2. \quad (13)$$

Следовательно, задача (9) эквивалентна задаче о поиске такого стабилизирующего регулятора, который обеспечивает минимум взвешенной H_2 нормы передаточной матрицы $H(s)$ замкнутой системы.

Теперь обратимся к функционалу I_z (7), связанному с выходной переменной $z(t)$, являющейся результатом прохождения случайного сигнала $\varphi(t)$ через линейную систему с передаточной функцией $F(s)$. Заметим, что для возмущений рассматриваемого типа, в соответствии с (5), эта функция должна удовлетворять соотношению

$$|F(j\omega)|^2 = |F_y(j\omega)|^2 + k^2 |F_u(j\omega)|^2 \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (14)$$

где F_y и F_u определяются формулами (11).

Для дисперсии переменной $z(t)$ справедливо равенство

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_z(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega, \quad (15)$$

где $S_z(s) = F(s)F(-s)S_{\varphi}(s)$ или $S_z(\omega) = |F(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega)$ — спектральная плотность выхода.

После подстановки S_z в (15) получаем

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) d\omega = \|FS_1\|_2^2. \quad (16)$$

Поскольку возмущение $\varphi(t)$ удовлетворяет эргодическому свойству, выполняются равенства

$$I_z(W) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} z^2(t) dt = \langle z^2 \rangle = I_2(W),$$

откуда следует, что

$$I_2(W) = \|FS_1\|_2^2. \quad (17)$$

Таким образом, на основании формул (13) и (17) можно утверждать, что классическая задача среднеквадратичного синтеза (9) эквивалентна задаче о поиске минимума нормы $\|HS_1\|_2$ и задаче о поиске минимума нормы $\|FS_1\|_2$, где $H(s) = (F_y(s) \quad kF_u(s))^T$, а функция $F(s)$ удовлетворяет равенству (14). Это обстоятельство, несмотря на то, что классический метод решения задачи синтеза получен сравнительно давно, имеет существенное теоретическое и практическое значение. В частности, переход к минимизации нормы $\|HS_1\|_2$ позволяет связать классическую задачу с современными универсальными методами, реализованными в среде MATLAB, а минимизация нормы $\|FS_1\|_2$ открывает путь к формированию специализированного алгоритма синтеза, упрощающего качественное исследование и численный поиск оптимальных регуляторов.

3. Специализированный метод решения задачи синтеза

Пусть задана LTI модель объекта управления (1), где $\varphi(t)$ — случайный стационарный эргодический процесс, имеющий нулевое математическое ожидание и заданную спектральную плотность

$$S_\varphi(s) \equiv \frac{N(s)N(-s)}{T(s)T(-s)}, \quad (18)$$

где $N(s)$ и $T(s)$ — гурвицевы полиномы.

Рассмотрим уравнение стабилизирующего регулятора (2) и будем характеризовать качество процессов управления в замкнутой системе (1),(2) с выходной переменной (5) среднеквадратичным функционалом (8).

Учитывая эквивалентность задач минимизации функционала (8) и минимизации нормы (17), будем искать оптимальный регулятор вида (2), исходя из требования

$$I(W) = \pi \|FS_1\|_2^2 \rightarrow \min_{W \in \Omega^*}, \quad (19)$$

где допустимое множество Ω^* задается формулой (3), а взвешенная норма передаточной функции $F(s)$ — формулой

$$\|FS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega) d\omega} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 S_\varphi(\omega) d\omega}. \quad (20)$$

Здесь $|F(j\omega)|^2$ определяется равенством (14) с учетом формул (11).

При этом минимизируемый функционал можно представить в явной зависимости от передаточной функции $W(s)$ искомого регулятора:

$$\begin{aligned}
I(W) &= \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 S_{\varphi}(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \left[|F_y(j\omega)|^2 + k^2 |F_u(j\omega)|^2 \right] S_{\varphi}(\omega) d\omega = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1 + k^2 |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) - B(j\omega)W(j\omega)|^2} S_{\varphi}(\omega) d\omega.
\end{aligned} \quad (21)$$

Однако отметим, что непосредственный поиск минимума функционала, представленного в виде (21) затруднен в силу его нелинейной зависимости от функции W .

Отмеченная трудность обычно преодолевается с помощью выполнения параметризации множества Ω^* одним из способов, указанных в работах [5], [9], [12]. Воспользуемся способом, принятым в работе [5], существующего которого состоит во введении варьируемых функций-параметров $\Phi(s)$:

$$\Phi(s) = \alpha(s)F_y(s) + \beta(s)F_u(s). \quad (22)$$

Здесь $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ — любые полиномы, которые одновременно не обращаются в тождественные нули и обеспечивают гурвицевость полинома

$$Q(s) = A(s)\beta(s) + B(s)\alpha(s).$$

Заметим, что функции-параметры $\Phi(s)$ и передаточные функции $W(s)$ в (2) связаны очевидными формулами

$$W = \frac{A\Phi - \alpha}{B\Phi + \beta}, \quad \Phi = \frac{\alpha + \beta W}{A - BW}. \quad (23)$$

При этом передаточные функции замкнутой системы определяются следующими выражениями

$$F_y = F_y(\Phi) = \frac{B\Phi + \beta}{Q}, \quad F_u = F_u(\Phi) = \frac{A\Phi - \alpha}{Q}. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение множество RL дробно-рациональных функций $h(s)$ комплексной переменной s , которые не имеют полюсов на мнимой оси. Рассмотрим его подмножество $RH_2 \subset RL$, состоящее из строго правильных рациональных дробей с гурвицевыми знаменателями, а также множество $RH_+ \subset RL$ рациональных дробей с гурвицевыми знаменателями, определяемое формулой

$$RH_+ = \{\Phi(s) \in RL : F_y(\Phi) \in RH_2, F_u(\Phi) \in RH_2\}.$$

Кроме того, введем в рассмотрение множество

$$\Omega_2^* = \{W(s) \in \Omega^* : F_y(W) \in RH_2, F_u(W) \in RH_2\}. \quad (25)$$

Нетрудно показать, что соотношения (23) определяют взаимно однозначное соответствие между множествами RH_+ и Ω_2^* .

Используя формулы (24), представим минимизируемый функционал (21) в явной зависимости от функции-параметра Φ :

$$I = \tilde{I}(\Phi) = \int_0^{j\infty} [F_y(\Phi)\bar{F}_y(\Phi) + k^2 F_u(\Phi)\bar{F}_u(\Phi)] S_{\varphi}(s) ds. \quad (26)$$

Здесь и далее знак « \leftarrow » над рациональной дробью означает замену ее аргумента « s » на « $-s$ ».

Отметим, что в исходной решаемой здесь задаче (19), допустимое множество Ω^* может быть с очевидностью сужено до Ω_2^* , поскольку, согласно (25), ему принадлежит искомое решение.

Тогда, в силу указанного взаимно однозначного соответствия между множествами RH_+ и Ω_2^* , определяемого формулами (23), задача (19) эквивалентна задаче

$$\tilde{I}(\Phi) \rightarrow \min_{\Phi \in RH_+}, \quad \Phi_0 = \arg \min_{\Phi \in RH_+} \tilde{I}(\Phi) \quad (27)$$

о поиске оптимальной функции-параметра Φ_0 .

Для нахождения указанной функции по исходным данным, преобразуем подынтегральное выражение в формуле (26), которое можно представить в виде

$$F_y(\Phi)\bar{F}_y(\Phi) + k^2 F_u(\Phi)\bar{F}_u(\Phi) = (T_1 - T_2\Phi)(\bar{T}_1 - \bar{T}_2\bar{\Phi}) + T_3, \quad (28)$$

где $T_1 = \frac{k^2\alpha\bar{A} - \beta\bar{B}}{QG}$, $T_2 = \frac{\bar{G}}{Q}$, $T_3 = \frac{k^2}{G\bar{G}}$, причем гурвицев полином $G(s)$ — результат факторизации

$$k^2 A\bar{A} + B\bar{B} \equiv G\bar{G}.$$

С учетом (28), минимизируемый функционал (26) принимает вид

$$\tilde{I}(\Phi) = \int_0^{j\infty} (T_1 - T_2\Phi)(\bar{T}_1 - \bar{T}_2\bar{\Phi}) S_\varphi ds + \int_0^{j\infty} T_3 S_\varphi ds.$$

Поскольку второе слагаемое здесь не зависит от функции Φ , оптимальное решение Φ_0 задачи (27) одновременно является решением задачи

$$I(\Phi) \rightarrow \min_{\Phi \in RH_+},$$

$$\text{где } I(\Phi) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} (T_1 - T_2\Phi)(\bar{T}_1 - \bar{T}_2\bar{\Phi}) S_\varphi ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T_1(\omega) - T_2(\omega)\Phi(\omega)|^2 S_\varphi(\omega) d\omega,$$

что, с учетом (20), может быть представлено как

$$I(\Phi) = \|F(s)S_1(s)\|_2^2 = \|[T_1(s) - T_2(s)\Phi(s)]S_1(s)\|_2^2.$$

Подставляя сюда выражения для T_1 и T_2 , получим

$$I(\Phi) = \left\| \left(\frac{k^2\alpha\bar{A} - \beta\bar{B}}{QG} - \frac{\bar{G}}{Q}\Phi \right) S_1 \right\|_2^2.$$

Обратим внимание на то, что тривиального решения задачи, обеспечивающего нулевое значение функционала, на множестве RH_+ нет. Действительно, полагая $\Phi = \tilde{\Phi} = (k^2\alpha\bar{A} - \beta\bar{B})/G\bar{G}$, получим $I(\tilde{\Phi}) = 0$, однако $\tilde{\Phi} \notin RH_+$, поскольку все корни полинома $\bar{G} = G(-s)$ расположены в правой полуплоскости.

Продолжим преобразование функционала $I(\Phi)$, разделив оба слагаемых на выражение (\bar{G}/G) . Поскольку $\|\bar{G}/G\|_2^2 = 1$, имеем

$$I(\Phi) = \|(M - L\Phi)S_1\|_2^2 = \|MS_1 - L\Phi S_1\|_2^2, \text{ где}$$

$$M = \frac{k^2 \alpha \bar{A} - \beta \bar{B}}{Q\bar{G}}, \quad L = \frac{G}{Q}.$$

Разложим первое слагаемое в сумму ортогональных элементов с помощью теоремы Θ_M и ганкелева Γ_M операторов с индексами M :

$$I(\Phi) = \|\Theta_M(S_1) + \Gamma_M(S_1) - L\Phi S_1\|_2^2 = \|\Theta_M(S_1) - L\Phi S_1\|_2^2 + \|\Gamma_M(S_1)\|_2^2. \quad (29)$$

Последнее равенство имеет место, поскольку в силу $\Gamma_M(S_1) \in RH_2^\perp$ $(\Theta_M(S_1) - L\Phi S_1) \in RH_2$ справедливо $(\Theta_M(S_1) - L\Phi S_1) \perp \Gamma_M(S_1)$.

Теперь найдем функции $\Theta_M(S_1)$ и $\Gamma_M(S_1)$. С этой целью сепарируем рациональную дробь $M(s)S_1(s)$:

$$M(s)S_1(s) = \frac{k^2 \alpha(s)A(-s) - \beta(s)B(-s)}{Q(s)G(-s)} \frac{N(s)}{T(s)} \equiv \frac{M_1(s)}{Q(s)T(s)} + \frac{R(s)}{G(-s)}, \quad (30)$$

откуда следует, что

$$\Theta_M(S_1) = \frac{M_1(s)}{Q(s)T(s)}, \quad \Gamma_M(S_1) = \frac{R(s)}{G(-s)}. \quad (31)$$

В соответствии с (30), построим полином $R(s)$, для чего приведем правую часть к общему знаменателю, получая при этом

$$k^2 \alpha(s)A(-s)N(s) - \beta(s)B(-s)N(s) \equiv M_1(s)G(-s) + R(s)Q(s)G(s)T(s).$$

Обозначая через g_i ($i = \overline{1, n}$) корни полинома $G(-s)$, отсюда нетрудно найти значения полинома $R(s)$ в n комплексных точках:

$$R(g_i) = -\frac{B(-g_i)N(g_i)}{A(g_i)T(g_i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда на базе интерполяционной формулы Лагранжа имеем:

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{G(-s)}{g_i - s} \frac{B(-g_i)N(g_i)}{A(g_i)T(g_i)G'(-g_i)}, \quad (32)$$

где $G'(-g_i) = dG(-s)/ds|_{s=g_i}$ (считаем, что все корни g_i — простые).

Поскольку полином $R(s)$ известен, из (31) и (30) следует

$$\Theta_M(S_1) = \frac{k^2 \alpha \bar{A} - \beta \bar{B}}{Q\bar{G}} S_1 - \frac{R}{\bar{G}}, \quad \Gamma_M(S_1) = \frac{R}{\bar{G}}.$$

Теперь обратимся к минимизируемому функционалу (29). Поскольку второе слагаемое не зависит от параметра Φ , то минимум функционала обеспечивается равенством нулю первого слагаемого. Покажем, что это слагаемое можно обратить в нуль с помощью функции Φ из множества RH_+ . Действительно из условия $\Theta_M(S_1) - L\Phi S_1 = 0$ имеем

$$\Phi_0 = \frac{(k^2 \alpha \bar{A} - \beta \bar{B})S_1 - RQ}{G\bar{G}S_1}.$$

При этом справедливы равенства $[(k^2 \alpha \bar{A} - \beta \bar{B})S_1 - RQ]_{s=g_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$, а следовательно числитель функции $\Phi_0(s)$ нацело делится на полином $G(-s)$. Тогда, поскольку полиномы $G(s)$ и $N(s)$ являются гурвицевыми, то и знаменатель $\Phi_0(s)$ — гурвицев полином. Кроме того, при $\Phi = \Phi_0$ функционал $I(\Phi)$ принимает конечное значение $I(\Phi_0) = \left\| \frac{R(s)}{G(-s)} \right\|_2^2$, т. е. выполняются условия $F_y(\Phi) \in RH_2$, $F_u(\Phi) \in RH_2$, откуда следует, что $\Phi_0 \in RH_+$.

Зная оптимальную функцию-параметр $\Phi_0(s)$ — решение задачи (27), по формуле (23) можно найти передаточную функцию $W_0(s)$ оптимального регулятора, решающего исходную задачу (19):

$$W_0(s) = \frac{[A(s)T(s)R(s) + B(-s)N(s)]/G(-s)}{[B(s)T(s)R(s) - k^2 A(-s)N(s)]/G(-s)}, \quad (33)$$

где деление на полином $G(-s)$ в числителе и знаменателе осуществляется *нацело* (без остатка).

Обратим внимание на то, что вспомогательный полином $R(s)$ (32) и передаточная функция $W_0(s)$ оптимального регулятора (33) *не зависят* от выбора полиномов $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ в формуле (22).

Проведенные построения позволяют сформулировать алгоритм решения задачи среднеквадратичного синтеза для SISO объекта.

В качестве исходных данных примем полиномы $A(s)$ и $B(s)$ в модели (1) объекта управления, гурвицевы полиномы $N(s)$ и $T(s)$ в спектральной плотности (18) внешнего возмущения, а также значение k весового множителя в среднеквадратичном функционале (8). Тогда для нахождения передаточной функции $W_0(s)$ оптимального регулятора необходимо:

1. Выполнить факторизацию полинома $\Gamma_*(s)$:

$$\Gamma_*(s) = k^2 A(s)A(-s) + B(s)B(-s) \equiv G(s)G(-s), \quad (34)$$

где $G(s)$ — гурвицев полином, а $G(-s)$ — полином, все корни которого расположены в правой полуплоскости симметрично корням $G(s)$.

2. Построить вспомогательный полином $R(s)$ по формуле

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{G(-s)}{g_i - s} \frac{B(-g_i)N(g_i)}{A(g_i)T(g_i)G'(-g_i)}, \quad (35)$$

где $G'(-g_i) = dG(-s)/ds|_{s=g_i}$, g_i ($i = \overline{1, n}$) — корни полинома $G(-s)$ (предполагается, что все они являются простыми).

3. Сформировать числитель $W_{01}(s)$ и знаменатель $W_{02}(s)$ передаточной функции оптимального регулятора по формулам

$$W_{01}(s) = \frac{A(s)T(s)R(s) + B(-s)N(s)}{G(-s)}, \quad (36)$$

$$W_{02}(s) = \frac{B(s)T(s)R(s) - k^2 A(-s)N(s)}{G(-s)}. \quad (37)$$

Деление на полином $G(-s)$ здесь выполняется нацело (без остатка).

4. Определить минимальное значение I_0 среднеквадратичного функционала, обеспечиваемое регулятором $u = W_0(s)y$:

$$I_0 = I(W_0) = \int_0^\infty \frac{k^2 S_\varphi(\omega)}{|G(j\omega)|^2} d\omega + \int_0^\infty \left| \frac{R(j\omega)}{G(j\omega)} \right|^2 d\omega. \quad (38)$$

Заметим, что реализация вычислений по формулам (34)–(38) в среде MATLAB является исключительно простой.

4. Применение универсальных методов H_2 -оптимизации

Воспользуемся тем фактом, что задача (9) минимизации среднеквадратичного функционала (8) эквивалентна задаче минимизации взвешенной H_2 нормы (13) передаточной матрицы $H(s)$ замкнутой системы, для которой входом служит возмущение $\varphi(t)$, а выходом — переменная $\xi(t)$, определяемая формулой (4).

Сформируем математическую модель замкнутой системы (1), (2), которая может быть представлена блок-схемой, изображенной на рис. 1. Эта схема соответствует стандартной LTI системе, образованной с помощью дробно-линейного преобразования (LFT [9]).

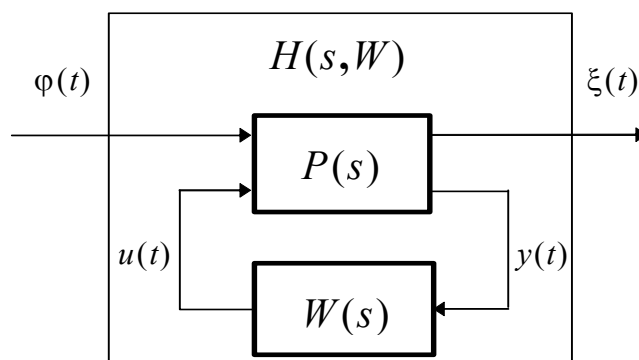


Рис. 1. Блок-схема замкнутой системы.

Обозначение $P(s)$ на рис. 1 соответствует передаточной матрице объекта управления с векторным входом $(\varphi \ u)^T \in R^2$ и векторным выходом

дом $(\xi \ y)^T \in R^3$. Эта матрица может быть получена на базе модели объекта управления в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_x x + h\varphi + bu, \\ \xi &= C_\xi x + d_\xi u, \\ y &= cx.\end{aligned}\tag{39}$$

Здесь $x \in R^n$ — вектор состояния объекта, A_x , h , b , c — произвольные матрицы соответствующих размерностей, удовлетворяющие тождествам

$$\det(Es - A_x) \equiv A(s), \quad c(Es - A_x)^{-1}bA(s) \equiv B(s), \quad (Es - A_x)^{-1}hA(s) \equiv 1,$$

где E — $n \times n$ единичная матрица. При этом в соответствии с (4), матрицы C_ξ и d_ξ однозначно определяются выражениями

$$C_\xi = \begin{pmatrix} c \\ 0_{1 \times n} \end{pmatrix}, \quad d_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

Записывая уравнения (39) в стандартной для среды MATLAB ss-форме, получим

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_x x + (h \mid b) \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_\xi \\ c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} & d_\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ u \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{40}$$

откуда следует, что передаточная матрица $P(s)$ объекта управления может быть представлена в виде

$$P(s) = \begin{pmatrix} C_\xi \\ c \end{pmatrix} (Es - A_x)^{-1} (h \mid b) + \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} & d_\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Передаточные функции F_y , F_u замкнутой системы (1), (2) от φ к y и от φ к u соответственно определяются равенствами (11). Тогда передаточная матрица $H(s)$ замкнутой системы от φ к ξ согласно (4) имеет вид

$$H(s) = \begin{pmatrix} F_y(s) \\ kF_u(s) \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \xi = H(s)\varphi.$$

При этом среднеквадратичный синтез для объекта (1) сводится к задаче

$$I_2(W) = \|HS_1\|_2^2 \rightarrow \min_{W \in \Omega^*}\tag{41}$$

для объекта (40), где множитель $S_1(s)$ определяется формулой (18).

Для решения этой задачи можно привлечь универсальные инструменты среды MATLAB, однако в них не предусматривается наличие весового множителя S_1 . Эта трудность легко преодолевается с использованием понятия формирующего фильтра, задаваемого уравнением $\varphi = S_1(s)\gamma$ в tf-форме, где γ — белый шум с единичной спектральной плотностью. Очевидно, что передаточная матрица H_γ замкнутой системы от входа γ к вы-

ходу ξ представляется выражением $H_\gamma(s) = H(s)S_1(s)$, поэтому задача (41) трансформируется к эквивалентному варианту

$$I_2(W) = \|H_\gamma\|_2^2 \rightarrow \min_{W \in \Omega^*} \quad (42)$$

для расширенного формирующим фильтром объекта. Запишем уравнения этого объекта в ss-форме:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_x & hc_f \\ 0_{q \times n} & A_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} & b \\ b_f & 0_{q \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ u \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_\xi & 0_{2 \times q} \\ c & 0_{1 \times q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} & d_\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь, в соответствии с (18), q — степень полинома $T(s)$, $x_f \in R^q$ — вектор состояния формирующего фильтра, A_f , b_f , c_f — произвольные матрицы соответствующих размерностей, удовлетворяющие тождествам

$$\det(E_q s - A_f) \equiv T(s), \quad c_f (E_q s - A_f)^{-1} b_f T(s) \equiv N(s),$$

E_q — единичная $q \times q$ матрица.

Для решения задачи (43) в принципе могут быть привлечены инструменты H_2 -оптимизации, включенные в среду MATLAB в составе ППП μ -Tools, RCT и LMIST. Однако при этом следует учитывать ряд принципиальных деталей.

Прежде всего, отметим, что в соответствии с основными положениями H_2 и H_∞ теории, минимум нормы матрицы $H(s)$ обеспечивается не на множестве Ω^* , а на его сужении $\Omega_0 \subset \Omega^*$, которое определяется как совокупность *строго правильных* дробно-рациональных функций из этого множества. Следовательно, вместо задачи (42) для указанных инструментов допустимой является задача

$$I_2(W) = \|H_\gamma\|_2^2 \rightarrow \inf_{W \in \Omega_0 \subset \Omega^*} \quad (44)$$

В работе [13] было показано, что точная нижняя граница функционала I_2 на множестве Ω_0 , в отличие от множества Ω^* , *не достигается*, однако справедливо равенство

$$\inf_{W \in \Omega_0 \subset \Omega^*} I_2(W) = \min_{W \in \Omega^*} I_2(W) = I_0,$$

где величина I_0 находится по формуле (38). Это позволяет утверждать, что с помощью инструментов среды MATLAB на базе решения задачи (44) нельзя получить оптимальную передаточную функцию $W_0 = W_{01}/W_{02}$ (36),(37), однако можно построить *минимизирующую последовательность* передаточных функций, сходящуюся к ней. Любой элемент этой последовательности можно трактовать как δ -квазиоптимальный регулятор, где

δ — относительное ухудшение значения функционала по сравнению с величиной I_0 , обеспечиваемое этим регулятором.

Вторая особенность рассматриваемой ситуации состоит в том, что с позиций теории H_2 и H_∞ оптимизации задачи (42) и (44) являются вырожденными, поскольку в уравнениях (43) объекта равен нулю матричный коэффициент, связывающий измеряемую переменную y и входную переменную u . В регулярной ситуации этот коэффициент должен иметь полный столбцовый ранг [15]. В связи с этим обстоятельством для решения задачи нельзя непосредственно воспользоваться функциями **h2syn** из пакета μ -Tools и **h2lqg** из пакета RCT. Привлечение указанных инструментов требует проведения предварительной регуляризации задачи.

Простейший способ регуляризации состоит в замене указанного коэффициента малым параметром ε в уравнениях (43), т. е. в переходе к математической модели объекта

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & | & hc_f \\ \hline 0_{q \times n} & | & A_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} & | & b \\ \hline b_f & | & 0_{q \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ u \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\xi & | & 0_{2 \times q} \\ \hline c & | & 0_{1 \times q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} & | & d_\xi \\ \hline \varepsilon & | & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ u \end{pmatrix}.$$

При условии $\varepsilon \neq 0$ точная нижняя граница функционала $I_2(W)$ достигается на множестве Ω_0 , и решение задачи (44) для объекта (45) с регулятором (2) может быть непосредственно найдено с помощью функций **h2syn** или **h2lqg**. При этом получаемая передаточная функция $\tilde{W} = \tilde{W}(s, \varepsilon)$ и соответствующее ей значение $\tilde{I} = I(\tilde{W}) = \tilde{I}(\varepsilon)$ функционала зависят от величины регуляризующего параметра.

Нетрудно убедиться в том, что для любой числовой последовательности $\{\varepsilon_i\}$, сходящейся к нулю при $i \rightarrow \infty$, справедливы равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{\tilde{W}(s, \varepsilon_i)\} = W_0(s), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \{\tilde{I}(\varepsilon_i)\} = I_0. \quad (46)$$

Таким образом, рассматриваемый метод регуляризации не только снимает проблему вырожденности, но и позволяет построить минимизирующую последовательность регуляторов, решающих задачу (44) для исходного объекта (43).

Кроме функций **h2syn**, **h2lqg** для решения задачи среднеквадратичной оптимизации может быть привлечена и функция **hinfmix** из пакета LMIST. Однако заметим, что указанное выше требование полноты ранга соответствующего матричного коэффициента здесь отсутствует [16]. Это связано с тем, что регуляризация с переходом к объекту типа (45) выполняется автоматически. С одной стороны, это достоинство, упрощающее применение этой функции, а с другой — недостаток, затрудняющий контроль над степенью близости к точному решению.

5. Пример решения SISO задачи среднеквадратичного синтеза

В качестве примера, иллюстрирующего приведенные в работе подходы, рассмотрим задачу среднеквадратичной оптимизации для простейшего линейного объекта с математической моделью

$$py = u + \varphi(t), \quad p = d/dt, \quad (47)$$

где $\varphi(t)$ — возмущение со спектральной плотностью

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}.$$

Полагая $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$, выполним факторизацию спектра:

$$S_1(s)S_1(-s) = \frac{16}{\pi} \frac{1}{(s^2 + 2s + 4)} \frac{1}{(s^2 - 2s + 4)},$$

откуда следует, что

$$N(s) = 4/\sqrt{\pi}, \quad T(s) = s^2 + 2s + 4. \quad (48)$$

Будем замыкать объект (47) стабилизирующими регуляторами

$$u = W(p)y, \quad (49)$$

рассматривая на движениях замкнутой системы (47), (49) среднеквадратичный функционал

$$I_2(W) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [y^2(t) + u^2(t)] dt = \langle y^2 \rangle + \langle u^2 \rangle. \quad (50)$$

Поставим задачу среднеквадратичного синтеза

$$I_2(W) \rightarrow \min_{W \in \Omega^*}. \quad (51)$$

Для ее решения имеем следующие исходные данные: $A(s) = s$, $B(s) = 1$, $N(s) = 4/\sqrt{\pi}$, $T(s) = s^2 + 2s + 4$, $k = 1$.

Прежде всего, воспользуемся специализированным методом, полученным в разделе 3. Выполняя построения по формулам (34)–(37), находим передаточную функцию $W_0(s)$ оптимального регулятора:

$$W_0(s) = \frac{s^2 + 3s + 7}{s - 4}, \quad (52)$$

а по формуле (38) — минимальное значение функционала:

$$I_0 = I_2(W_0) = I_{y_0} + I_{u_0} = 0.5918,$$

где $I_{y_0} = I_y(W_0) = \langle y^2 \rangle = 0.1516$, $I_{u_0} = I_u(W_0) = \langle u^2 \rangle = 0.4402$ — значения дисперсий координаты и управления для оптимальной замкнутой системы.

Обратим внимание на то, что полученная передаточная функция (52) обладает следующими очевидными недостатками, которые характерны для оптимальных среднеквадратичных регуляторов:

- не является правильной дробью;
- соответствует неустойчивому линейному динамическому объекту;

– определяет нулевой радиус шара робастной устойчивости в пространстве параметров объекта.

Указанные недостатки существенно затрудняют практическую реализацию оптимальных регуляторов, поэтому в работе [13] были предложены определенные способы их преодоления.

Следует отметить, что этой же цели по существу может служить и использование для решения задачи (51) универсальных средств H_2 оптимизации среды MATLAB.

Для реализации подхода, предложенного в разделе 4 данной работы, сформируем программу на языке MATLAB, текст которой приведен в приложении.

В первом блоке вычисляются величины I_0 , I_{y0} , I_{u0} для оптимальной замкнутой системы, полученной по формулам (34)–(37). Второй блок строит формирующий фильтр $\varphi = S_1(s)\gamma$, третий блок — уравнения объекта управления (40), четвертый блок порождает расширенный объект (43).

В пятом блоке осуществляется построение минимизирующей последовательности регуляторов для задачи (51), удовлетворяющих условию (46), путем решения задач (44) для объектов (45) с различными значениями числа ε . При этом используется функция **h2syn** из пакета μ -Tools. Вычисления производятся для конечного набора чисел $\varepsilon = [0.1 \ 0.07 \ 0.05 \dots 10^{-8}]$, а их результат представлен в следующей таблице, содержащей значения функционала (50) и его отдельных слагаемых для объекта (47), замкнутого синтезированными регуляторами.

ε	$I_y(\tilde{W})$	$I_u(\tilde{W})$	$I_2(\tilde{W})$
0	1.5160e-001	4.4023e-001	5.9184e-001
1.0000e-001	6.5917e-001	1.2134e-000	1.8726e-000
7.0000e-002	4.8041e-001	7.1827e-001	1.1987e-000
5.0000e-002	4.1044e-001	6.0968e-001	1.0201e-000
3.0000e-002	3.4331e-001	5.4581e-001	8.8912e-001
1.0000e-002	2.6055e-001	4.9759e-001	7.5813e-001
1.0000e-003	1.9002e-001	4.6516e-001	6.5517e-001
1.0000e-004	1.6683e-001	4.5207e-001	6.1890e-001
1.0000e-005	1.5811e-001	4.4583e-001	6.0394e-001
1.0000e-006	1.5451e-001	4.4285e-001	5.9736e-001
1.0000e-007	1.5292e-001	4.4146e-001	5.9438e-001
1.0000e-008	1.5221e-001	4.4080e-001	5.9301e-001

Анализ таблицы позволяет заключить, что при условии $\varepsilon \leq 0.001$ ухудшение значения функционала по отношению к его оптимуму не превосходит 11%.

Приведем передаточные функции синтезированных регуляторов:

$$\varepsilon = 0.01, \quad \tilde{W}(s, \varepsilon) = -\frac{s^2 + 2.68s + 5.09}{0.0509s^3 + 0.466s^2 + 1.22s + 4.20},$$

$$\varepsilon = 0.001, \quad \tilde{W}(s, \varepsilon) = -\frac{s^2 + 2.90s + 5.84}{5.84 \cdot 10^{-3} s^3 + 0.118s^2 + 0.193s + 4.02},$$

$$\varepsilon = 0.0001, \quad \tilde{W}(s, \varepsilon) = \frac{s^2 + 2.97s + 6.40}{-6.40 \cdot 10^{-4} s^3 - 0.0277s^2 + 0.397s - 4.00},$$

$$\varepsilon = 0.00001, \quad \tilde{W}(s, \varepsilon) = \frac{s^2 + 2.99s + 6.71}{-6.71 \cdot 10^{-5} s^3 - 0.00625s^2 + 0.708s - 4.00}.$$

Стремление к передаточной функции (52) при уменьшении величины ε очевидно. При этом все синтезированные функции являются правильными дробями, а при условии $\varepsilon \geq 0.001$ их знаменатели гурвицевы.

В итоге применения универсального H_2 подхода на базе пакета μ -Tools можно рекомендовать регулятор, полученный для значения $\varepsilon = 0.001$, в качестве квазиоптимального по отношению к (52). Этот регулятор в ss-форме легко реализуется и не значительно ухудшает качество управления по сравнению с оптимумом.

Шестой блок программы осуществляет квазиоптимальный синтез для задачи (51) путем решения задачи (44) для объекта (43) с помощью функции **hinfmix** из пакета LMIST. При этом регуляризация осуществляется автоматически. Передаточная функция $W_h(s)$ синтезированного регулятора имеет вид

$$W_h(s) = \frac{s^2 + 3.42s + 7.58}{-4.60 \cdot 10^{-7} s^3 - 0.0918s^2 + 0.466s - 4.96},$$

что соответствует следующим значениям функционала (50) и его отдельных слагаемых: $I_{yh} = I_y(W_h) = 0.1750$, $I_{uh} = I_u(W_h) = 0.4609$, $I_h = I_2(W_h) = I_{yh} + I_{uh} = 0.6360$. Этот результат также можно трактовать, как достаточно близкий к оптимуму, однако, в отличие от предшествующего метода, здесь нет устойчивости регулятора. Кроме того, автоматическая регуляризация не позволяет влиять на степень близости к оптимальному решению. Однако заметим, что функцию **hinfmix** можно применять и для построения минимизирующих последовательностей так же, как и функцию **h2syn**.

6. Выводы

1. Точное решение задачи среднеквадратичного синтеза можно получить как аналитически, так и численно, с использованием предложенного в работе специализированного подхода на базе формул (34) — (38).

2. Для численного решения задачи можно применить универсальные программные средства оптимизации по норме H_2 , реализованные в среде MATLAB — функции **h2syn**, **h2lqg** и **hinfmix** из пакетов μ -Tools, RCT и LMIST соответственно.

3. С помощью указанных средств нельзя получить точное решение задачи синтеза в связи с ее существенной вырожденностью. Однако с использованием регуляризации можно строить квазиоптимальные законы управления как приближения к точному решению.

4. Преимуществом получаемых при этом квазиоптимальных регуляторов является возможность их практической реализации, которая не всегда присуща точным решениям.

5. Функция **hinfmix** автоматически выполняет регуляризацию рассматриваемой задачи, что упрощает ее применение, однако для контроля качества получаемого приближения желательно знать точное решение.

6. С помощью функций **h2syn**, **h2lqg** и **hinfmix** на базе предложенного метода регуляризации удобно строить минимизирующие последовательности квазиоптимальных регуляторов, сходящиеся к точному решению.

7. Наиболее рациональным путем практического решения задач среднеквадратичной оптимизации следует считать совместное применение в среде MATLAB специализированного и универсального подходов, рассмотренных в данной работе.

Литература

1. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем управления.— М.: Физматгиз, 1960.
2. Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д. Теория линейных следящих систем.— М.: Физматгиз, 1961.
3. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического управления.— М.: Машиностроение, 1964.
4. Пугачев В. С., Казаков И.Е., Евланов П. Г. Основы статистической теории автоматических систем.— М.: Наука, 1974.
5. Алиев Ф. А., Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления.— Киев: Наукова думка, 1978.— 327 с.
6. Веремей Е. И. Частотный метод синтеза оптимальных регуляторов для линейных систем со скалярным возмущением (Часть 1) // Известия вузов СССР. Электромеханика.— 1985.— №10.— С.52–57.
7. Веремей Е. И. Частотный метод синтеза оптимальных регуляторов для линейных систем со скалярным возмущением (Часть 2) // Известия вузов СССР. Электромеханика.— 1985.— № 12.— С.33–39.
8. Бокова Я. М., Веремей Е. И. Вычислительные аспекты спектрального метода H_∞ -оптимального синтеза // Теория и системы управления.— 1995.— №4.— С.88–96.
9. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback control theory.— New York: Macmillan Publ. Co., 1992.— XI, 227 p.

10. Francis B. A. A course in H_∞ control theory.— Berlin: Springer-Verlag, 1987.— (Lecture Notes in Control and Information Sciences; V.88).
11. Nesterov Y., Nemirovski A. Interior-point polynomial algorithms in convex programming.— Philadelphia: SIAM, 1994.
12. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H-теория) // Автоматика и телемеханика.— 1992.— №9.— С.3–32.
13. Веремей Е. И., Петров Ю. П. Метод синтеза оптимальных регуляторов, допускающий техническую реализацию // Математические методы исследования управляемых механических систем.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982.— С.24–31.
14. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление.— М.: Наука, 2002.— 303 с.
15. μ -Analysis and synthesis TOOLBOX: User's guide/ G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover et al.— Natick (Mass.): The MathWorks, Inc., 1995.— 756 p.
16. LMI Control TOOLBOX: User's Guide.— Natick (Mass.): The MathWorks, Inc., 1995.— 734 p.

Приложение

```
% Mean Square Optimal Synthesis
clear;
format short e;

% 1. Mean Square Optimal System
dnum=conv([7 7],[1 2 4]);
numx=[1 -4]; numu=[1 3 7];
sx=tf(numx,dnum); su=tf(numu,dnum);
Iy0=16*(norm(sx)^2); Iu0=16*(norm(su)^2); I0=Iy0+Iu0;
ai(1,1)=0; ai(1,2)=Iy0; ai(1,3)=Iu0; ai(1,4)=I0;

% 2. Shaping Filter
S1=ltisys('tf',1,[1 2 4]); % SISO-system with tf 1/(s^2+2s+4)
SF=sdiag(S1,1);

% 3. Controlled Plant (no Filter)
Ap=0; Bp=[1 1];
Cp=[1 0 1]'; Dp=[0 0; 0 1; 0 0];
sPlant=pck(Ap,Bp,Cp,Dp);

% 4. Augmented Plant
Paug0=smult(SF,sPlant); [a,b,c,d]=unpck(Paug0);

% 5. Mu-Tools approach
for ep=[0.1 0.07 0.05 0.03 0.01 1e-3 1e-4 1e-5 1e-6 1e-7 1e-8]
    d(3,1)=ep; Paug=pck(a,b,c,d);

% h2-Optimal Synthesis
[W1,Gz,Nm]=h2syn(Paug,1,1);
```

```
[nuW,deW]=ltitf(W1); ko=nuW(2); nuW=nuW/ko; deW=deW/ko;

% Closed-loop System
sC1=slft(Paug0,W1,1,1);
% h2-norms
h2J=norm2(sC1);h2y=norm2(ssub(sC1,1,1));
h2u=norm2(ssub(sC1,1,2));
H2J=16*h2J^2; H2y=16*h2y^2; H2u=16*h2u^2;
ai=[ai;ep H2y H2u H2J];
end;

% 6. LMICT approach
[ggf,hh,W1]=hinfmix(Paug0,[2 1 1],[0 0 0 1]);
[nuW,deW]=ltitf(W1); ko=nuW(2); nuW=nuW/ko; deW=deW/ko;

% Closed-loop System
sC1=slft(Paug0,W1,1,1);
% h2-norms
h2J=norm2(sC1); h2y=norm2(ssub(sC1,1,1));
h2u=norm2(ssub(sC1,1,2));
H2J=16*h2J^2; H2y=16*h2y^2; H2u=16*h2u^2;
```

УДК 517.977.5

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА NCD ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Веремей Е. И., Коровкин М. В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,

e-mail: maxik@vrm.apmath.spbu.ru

1. Введение

Инструментальный пакет (ИП) NCD Blockset предоставляет пользователю широкие возможности для настройки параметров нелинейных динамических объектов, обеспечивающих желаемое качество переходных процессов. В качестве средства для достижения указанной цели принимается оптимизационный подход с минимизацией функции штрафа за нарушение динамических ограничений. При помощи данного инструмента можно настраивать параметры нелинейной Simulink-модели, в качестве которых может быть заявлено любое количество переменных, включая скаляры, векторы и матрицы. Особую значимость имеет то обстоятельство, что в процессе настройки могут учитываться неопределенности параметрического типа математической модели, что позволяет синтезировать робастные законы управления.

В качестве естественного примера применения NCD Blockset можно указать параметрический синтез законов управления динамическими объектами, оптимальных в том или ином смысле. Однако для достаточно важного класса подобных задач использование мощных возможностей данного пакета может быть затруднено как в силу специфики самих задач, так и из-за особенностей использования блока NCD Outport. Это может выражаться, например, в сложностях, связанных с заданием допустимого множества изменения варьируемых параметров, подлежащих поиску. Данные сложности могут возникать не только на этапе формализации задачи, но и на этапе реализации алгоритмов ее решения на ЭВМ.

В аналитических исследованиях довольно часто используется линейная модель объекта, выступающая в качестве базы при синтезе законов управления и начальной оценке динамики. Как известно, любые движения линейного объекта, и в частности, такие их показатели как время попадания в окрестность положения равновесия, максимальное динамическое отклонение от него и другие существенно зависят от расположения нулей и полюсов замкнутой системы. По существу, соответствующие точки на комплексной плоскости можно трактовать как интегральные характеристики качества, независимо от выбора конкретного движения, определяемого начальными условиями и внешними возмущениями.

Однако по своей природе ИП NCD Blockset не ориентирован на учет требований по расположению нулей и полюсов, в результате чего проводимая с его помощью оптимизация носит локальный характер, присущий только рассматриваемому конкретному движению. В результате, при переходе к другому движению, в известном смысле подобном данному, проведенная настройка параметров может привести к существенному ухудшению качества процесса. При этом проведение перенастройки по ряду причин может оказаться нежелательным или невозможным.

В связи с отмеченным обстоятельством в работе предлагается метод решения задач параметрической оптимизации нелинейных систем управления, позволяющий использовать все преимущества ИП NCD Blockset с заведомым учетом интегральных требований, предъявляемых к замкнутой системе. Метод базируется на единой идеологии модальной параметрической оптимизации динамических систем.

2. Постановка задачи модальной параметрической оптимизации

Одной из наиболее широко используемых на практике задач оптимизации нестационарных режимов движения для управляемых объектов является аналитический синтез линейных регуляторов, обеспечивающих экстремум некоторого функционала, заданного на движениях замкнутой нелинейной системы. При этом оптимизация осуществляется на различных допустимых множествах линейных регуляторов, имеющих произвольную или фиксированную структуру.

В целом ряде ситуаций допустимые множества формируются так, чтобы корни характеристического полинома соответствующего линейного приближения были расположены в заданных областях открытой левой полуплоскости. Такую проблему можно назвать *задачей модальной оптимизации*, поскольку она в явном виде связана с вопросами теории модального управления [1].

В качестве математической модели объекта управления рассмотрим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в отклонениях от некоторого контролируемого движения:

$$\dot{x} = G(t, x, u, \varphi), \quad (1)$$

где $x \in E^n$ — вектор отклонений состояния объекта, $u \in E^m$ — вектор управляющих воздействий, $\varphi \in E^l$ — вектор возмущений.

При условиях $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $\varphi(t) \equiv 0$ система (1) находится в положении равновесия, что соответствует контролируемому движению объекта управления. Пусть функция G такова, что система (1) может быть линеаризована в окрестности нулевого положения равновесия, что приводит к системе линейных дифференциальных уравнений объекта управления вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + H(t)\varphi. \quad (2)$$

Матрицы системы (2) имеют своими компонентами соответствующие частные производные от функции G , вычисленные при условиях $x=0$, $u=0$, $\varphi=0$.

В дальнейшем будем полагать, что матрицы A , B , H в (2) — постоянные, причем справедливо равенство

$$\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

гарантирующее полную управляемость по Калману.

В дополнение к уравнениям линейного приближения (2), введем уравнение измерения, и будем рассматривать линейную математическую модель объекта в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + H\varphi, \\ y &= Cx. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь C — постоянная матрица, $y \in E^k$ — вектор измеряемых координат, которые используются при формировании регулятора

$$u = V(p, h)y. \quad (4)$$

В последнем случае будем считать, что структура передаточной матрицы $V(s, h)$ фиксирована, причем выделен вектор $h \in E^r$ настраиваемых параметров, подлежащих выбору в процессе синтеза.

На движениях системы (1) при условиях $x(0) = x^0$, $z(0) = 0$, $\varphi(t) \equiv 0$ зададим некоторый неотрицательный функционал

$$I_H = I_H(\bar{x}(t, x_0) \bar{\mu}(t)) = I_H^*(V(s, h)) = I_H(h), \quad (5)$$

который при прочих равных условиях превращается в функцию вектора h настраиваемых параметров регулятора.

Определение 1. Регулятор $u = V(p, h_0)y$ будем называть *оптимальным* по отношению к функционалу (5), если он является *стабилизирующим* и среди всех стабилизирующих регуляторов вида (4) доставляет величине $I_H(h)$ наименьшее возможное значение.

Определение 2. Задачей *модального параметрического синтеза* (модальной параметрической оптимизации) будем называть задачу поиска настраиваемых параметров оптимального регулятора $u = V(p, h_0)y$, которую можно представить в виде

$$I_H = I_H(h) \rightarrow \min_{h \in \Omega_H}, \quad (6)$$

где множество $\Omega_H \subset E^r$ допустимых параметров таково, что все корни характеристического полинома замкнутой системы (3), (4) располагаются в заданной области S_A комплексной плоскости.

Как видно из определения 2, применение алгоритмов NCD Blockset для решения задачи (6) невозможно без дополнительных усовершенствований: допустимое множество Ω_H не всегда является r -мерным паралле-

лепипедом. Напомним, что множество изменения варьируемых параметров в блоке NCD Outport задается в виде параллелепипеда с конечными или бесконечными гранями.

В дальнейшем будем считать, что множество Ω_H таково, что минимальное значение рассматриваемого функционала на нем достигается. В противном случае следует ставить вопрос о построении минимизирующей последовательности настраиваемых параметров, обеспечивающей сходимость последовательности значений функционала к его точной нижней границе, которая всегда существует в силу ограниченности снизу на указанном множестве.

Дадим два вспомогательных определения.

Определение 3. Будем говорить, что структура регулятора (4) является *полной*, если степени полиномов в числителях и знаменателях компонентов передаточной матрицы $V(s, h)$, а также размерность и состав компонентов вектора h таковы, что с помощью выбора этого вектора (т. е. назначения конкретных величин настраиваемых параметров) можно обеспечить произвольный спектр корней характеристического полинома $\Delta_3(s, h)$ замкнутой системы.

Определение 4. *Степенью устойчивости* полинома $P(s)$ с корнями p_1, p_2, \dots, p_τ , будем называть число

$$ds[P(s)] = -\max_{i=1, \tau} \operatorname{Re} p_i,$$

где τ — степень полинома $P(s)$.

3. Вычислительный подход к решению задачи

В частных ситуациях задания допустимого множества $\Omega_H \subset E^r$ в пространстве настраиваемых параметров, указанного в определении 2, можно предложить эффективный численный подход, который изначально ориентирован на решение задачи модального синтеза (6) в параметрическом варианте. Этот подход базируется на непосредственном поиске экстремума выбором оптимального положения корней в их допустимых областях C_Δ на комплексной плоскости. В простейшем варианте его идея представлена в работе [2].

Уточним постановку задачи (6) считая, что заданная структура регулятора (4) является полной и вводя следующее частное определение допустимого множества Ω_H :

$$\Omega_H = \{ h \in E^r : \delta_i(h) \in C_\Delta, i = \overline{1, n_d} \}, \quad (7)$$

где $\delta_i(h)$ — корни характеристического полинома $\Delta_3(s, h)$ степени n_d замкнутой системы (3), (4), C_Δ — заданная область на комплексной плоскости.

Очевидно, что мы имеем дело со своеобразной задачей нелинейного программирования с достаточно сложно заданной целевой функцией и ограничениями. Общая теория и конкретные методы направленного поиска параметров стабилизирующего закона управления для нелинейных систем в различных вариантах постановки задач приведены в монографиях [3], [4]. Однако в частных ситуациях эффективность их применения может быть существенным образом повышена путем трансформации поставленной задачи к тем или иным вариантам задач на безусловный экстремум.

Практика решения прикладных задач теории управления показывает [5], что существует определенная совокупность стандартных областей на комплексной плоскости, которые наиболее часто используются при анализе и синтезе систем управления. Здесь мы рассмотрим три варианта таких областей $C_{\Delta 1}$, $C_{\Delta 2}$ и $C_{\Delta 3}$ изображенных на рис. 1.

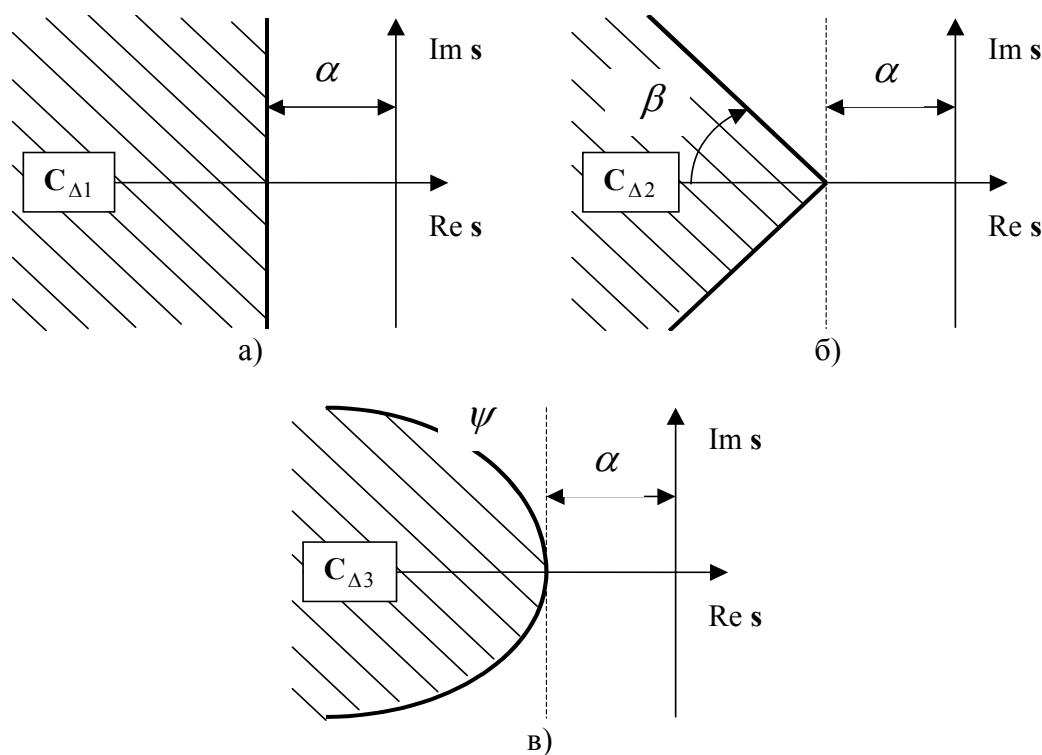


Рис. 1.

Введем обозначения $x = \operatorname{Re} s$, $y = \operatorname{Im} s$, где s — произвольная точка комплексной плоскости. При этом формальное представление указанных областей имеет следующий вид:

вариант 1: $C_{\Delta} = C_{\Delta 1} = \{s = x \pm jy \in C^1 : x \leq -\alpha\}$, где $\alpha > 0$ — заданное вещественное число;

вариант 2: $C_{\Delta} = C_{\Delta 2} = \{s = x \pm jy \in C^1 : x \leq -\alpha, 0 \leq y \leq (-x - \alpha) \operatorname{tg} \beta\}$, где $0 \leq \beta < \pi/2$ и $\alpha > 0$ — заданные вещественные числа;

вариант 3: $C_A = C_{A3} = \{s = x \pm yj \in C^1 : x \leq -\alpha, 0 \leq y \leq \psi(-x - \alpha)\}$, где $\psi(\xi)$ — заданная вещественная неотрицательная функция вещественной переменной $\xi \in [0, \infty)$, причем такая, что $\psi(0) = 0$, $\alpha > 0$ — заданное вещественное число.

Очевидно, что третий вариант является обобщением второго.

Основа предлагаемого подхода достаточно проста и состоит в следующем: при условии полноты структуры регулятора (4) необходимо задать однозначное отображение пространства E^{n_d} во множество корней характеристического полинома замкнутой системы, принадлежащих заданной области C_A . Для различных случаев задания областей C_A в приложении предложены отображения, позволяющие осуществить преобразование исходной задачи к задачам на безусловный экстремум.

Для построения вычислительного метода решения задачи параметрического синтеза (6) на допустимом множестве Ω_H (7) зададим произвольный вектор $\gamma \in E^{n_d}$ и построим вспомогательный полином $\Delta^*(s, \gamma)$, чьи корни располагаются в C_A . Потребуем, чтобы настраиваемые параметры регулятора полной структуры (4), объединенные в вектор $h \in E^r$, были выбраны так, чтобы обеспечивалось выполнение тождества

$$\Delta_3(s, h) \equiv \Delta^*(s, \gamma), \quad (8)$$

где $\Delta_3(s, h)$ — характеристический полином замкнутой системы степени n_d . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s в (8), получим систему нелинейных уравнений

$$L(h) = \chi(\gamma), \quad (9)$$

относительно неизвестных компонентов вектора h , которая при любых $\gamma \in E^{n_d}$ является совместной в силу полноты структуры регулятора (4). Будем считать, что в общем случае эта система имеет неединственное решение. Тогда вектор h может быть представлен как совокупность двух векторов $h = \{\bar{h}, h_c\}$, где $h_c \in E^{n_c}$ — свободная составляющая (назначение которой произвольно), \bar{h} — зависимая составляющая, т. е. вектор, однозначно определяемый решением системы (9) при заданном векторе h_c .

Введем обозначение для общего решения системы (9):

$$h = h^* = \{\bar{h}^*(h_c, \gamma), h_c\} = h^*(\gamma, h_c) = h^*(\varepsilon),$$

где через $\varepsilon = \{\gamma, h_c\}$ обозначен произвольный вектор независимых параметров размерности λ , причем

$$\lambda = \dim \varepsilon = \dim \gamma + \dim h_c = n_d + n_c.$$

Используя регулятор (4) с полученным вектором настраиваемых параметров h^* , сформируем уравнения динамики замкнутой нелинейной

системы, на движениях которой при $\dot{\delta} = u - \delta$, $f_1(x) = \begin{cases} x, & |x| < x_0, \\ x_0 \operatorname{sign}(x), & |x| \geq x_0. \end{cases}$

$\dot{\delta} = \begin{cases} f_1(u - \delta), & |\delta| < \delta_0, \\ 0, & |\delta| \geq \delta_0, \end{cases}$ функционал I_H (5), характеризующий качество ста-

билизации контролируемого движения, становится функцией вектора ε :

$$I_H = I_H(\bar{x}(t)\bar{u}(t)) = I_H^*(V(s, h^*(\varepsilon))) = I_H^*(\varepsilon). \quad (10)$$

При этом справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Если в задаче параметрического синтеза (6), где Ω_H — допустимое множество, определяемое соотношением (7), экстремум достигается в некоторой точке $h_0 \in \Omega_H$, то в пространстве E^λ найдется такая точка ε_0 , что $h_0 = h^*(\varepsilon_0)$, причем

$$\varepsilon_0 = \operatorname{argmin}_{\varepsilon \in E^\lambda} I_H^*(\varepsilon). \quad (11)$$

И обратно: если в пространстве E^λ существует точка ε_0 , удовлетворяющая (11), то точка $h_0 = h^*(\varepsilon_0)$ является решением задачи (6). Или, иными словами, в указанном смысле задача (6) эквивалентна задаче на безусловный экстремум вида

$$I_H^* = I_H^*(\varepsilon) \rightarrow \inf_{\varepsilon \in E^\lambda}, \quad (12)$$

Доказательство. Предположим, что имеет место условие

$$h_0 = \operatorname{argmin}_{h \in \Omega_H} I_H(h), I_{H0} = I_H(h_0). \quad (13)$$

При этом замкнутая линейная система (3), (4) будет иметь характеристический полином $\Delta_3(s, h)$ с корнями, расположенными в области C_Δ . Следовательно, в соответствии со свойствами отображений, приведенных в конце статьи, найдется такая точка $\gamma = \gamma_0 \in E^{n_d}$, что $\Delta_3(s, h_0) \equiv \Delta^*(s, \gamma_0)$. Следовательно, в пространстве E^λ существует точка $\varepsilon_0 = \{\gamma_0, h_{c0}\}$ (h_{c0} — соответствующая составляющая известного вектора h_0), для которой выполняются условия $h_0 = h^*(\varepsilon_0), I_H^*(\varepsilon_0) = I_{H0}$.

Осталось показать, что в E^λ не существует точки ε_{01} такой, что $I_H^*(\varepsilon_{01}) < I_{H0}$. Действительно, предположим обратное. Но тогда для точки $h^*(\varepsilon_{01})$ имеет место условие $I_H(h^*(\varepsilon_{01})) = I_H^*(\varepsilon_{01}) < I_{H0}$. Однако оно не может быть выполнено в силу (13). Аналогично доказывается и обратное утверждение теоремы. ■

Проведенные рассуждения позволяют сформировать следующий алгоритм решения задачи параметрического синтеза (6).

1. Задать произвольную начальную точку $\gamma \in E^{n_d}$ и построить полином $\Delta^*(s, \gamma)$, имеющий корни в области C_Δ .

2. В соответствии с тождеством $\Delta_3(s, h) \equiv \Delta^*(s, \gamma)$ сформировать систему нелинейных уравнений (9) которая всегда совместна и, если ее решение неединственное, назначить произвольный вектор свободных переменных $h_c \in E^{n_c}$.

3. При заданном векторе $\varepsilon = \{\gamma, h_c\} \in E^\lambda$ решить систему (9), получая при этом точку $h^*(\varepsilon)$.

4. Сформировать уравнения замкнутой нелинейной системы (1), (4) и на соответствующем ее движении вычислить значение минимизируемого функционала $I_H^*(\varepsilon)$ (10).

5. С помощью любого допустимого численного метода решения задачи (12) на безусловный экстремум, задать новую точку ε и, повторяя пункты 2 — 4, минимизировать функцию $I_H^*(\varepsilon)$.

6. По нахождении точки $\varepsilon_0 = \underset{\varepsilon \in E^\lambda}{\operatorname{argmin}} I_H^*(\varepsilon)$, определить вектор $h_0 = h^*(\varepsilon_0)$, который и принять в качестве решения исходной задачи (6).

7. Если величина $I_{H0}^* = \inf_{\varepsilon \in E^\lambda} I_H^*(\varepsilon)$ не достигается в конечной точке ε_0 , то построить с помощью того же численного метода любую минимизирующую последовательность $\{\bar{\varepsilon}_i\}$, обеспечивающую сходимость к I_{H0}^* . Поскольку при любом ε имеем $I_H^*(\varepsilon) \geq 0$, такая последовательность обязательно найдется. При этом в качестве решения задачи (12) следует принять последовательность $\{h_i\}$, где $h_i = h^*(\bar{\varepsilon}_i)$.

4. Реализация алгоритма в среде MATLAB

Приведенный выше алгоритм довольно просто реализовать с использованием универсальных средств системы MATLAB-Simulink.

Проиллюстрируем это на примере задачи оптимизации собственного движения надводного судна при переходах по курсу. Пусть в качестве модели объекта управления используется следующая упрощенная система дифференциальных уравнений, учитывающая нелинейности в динамике гидропривода вертикального руля:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= a_{11}\beta + a_{12}\omega + b_1\delta, \\ \dot{\omega} &= a_{21}\beta + a_{22}\omega + b_2\delta, \\ \dot{\phi} &= \omega,\end{aligned}$$

$$\dot{\delta} = \begin{cases} f_1(u - \delta), & |\delta| < \delta_0, \\ 0, & |\delta| \geq \delta_0, \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & |x| < x_0, \\ x_0 \operatorname{sign}(x), & |x| \geq x_0. \end{cases}$$

Здесь β — угол дрейфа, ω — угловая скорость по курсу, φ — курсовой угол, δ — угол отклонения руля, $\delta_0 = 30^\circ$, $x_0 = 3^\circ / \text{сек}$,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -0.0113V; & a_{12} &= 0.274; \\ a_{21} &= 0.000486V^2; & a_{22} &= -0.0216V; \\ b_1 &= -0.00147V; & b_2 &= -0.000113V^2, \end{aligned}$$

V — скорость хода.

Содержательной целью управления является переход по курсу на заданную величину $\varphi_3 = 50^\circ$ из начального нулевого положения с минимальным перерегулированием и максимальным быстродействием. Структура регулятора фиксируется в виде $u_0 = k_1\beta + k_2\omega + k_3(\varphi - \varphi_3)$, при этом поиску подлежат коэффициенты k_1 , k_2 , k_3 .

Если пренебречь уравнением гидропривода (которое в линейном варианте реализуется простым апериодическим звеном: $\dot{\delta} = u - \delta$), то в качестве управляющего воздействия можно принять угол отклонения руля, т. е. $\delta = u_0$. При этом указанная структура регулятора обеспечивает возможность произвольного назначения расположения полюсов собственно объекта. Тогда, используя функцию **place** из состава Control System Toolbox можно найти k_1 , k_2 , k_3 для заранее заданного набора собственных значений матрицы замкнутой системы, который определяется в зависимости от значений вектора варьируемых параметров $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ в соответствии с алгоритмом по формулам, приведенным в приложении. Эту фазу легко реализовать, указав в качестве свойства *Simulation start function* Simulink модели строку следующего вида:

[kkk prec message]=place(Alin,blin,par2roo2([gm1 gm2 gm3], alli, beli));

Здесь **kkk** — вектор коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 , взятых с обратным знаком, **Alin** и **blin** — матрицы линейной модели, текст функции **par2roo2**, вычисляющей значения корней характеристического полинома по заданным параметрам, приведен в приложении.

В качестве области расположения корней характеристического полинома замкнутой системы выбран вариант C_{42} со следующими параметрами: $alli = \alpha = 0.075$, $beli = \beta = \pi / 4$, обеспечивающими требуемую степень устойчивости и колебательности замкнутой системы.

Пример соответствующей Simulink модели приведен на рис. 2.

Поиск оптимальных значений коэффициентов γ_i осуществляется при помощи блока NCD Outport исходя из условия минимума функции штрафа, которая автоматически формируется по ограничениям, задаваемым внутри блока. При реализации коэффициентам $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ поставлены в соответствие глобальные переменные gm1, gm2, gm3 рабочего пространства MATLAB, имена которых указываются в качестве параметра Tunable variables блока NCD Outport.

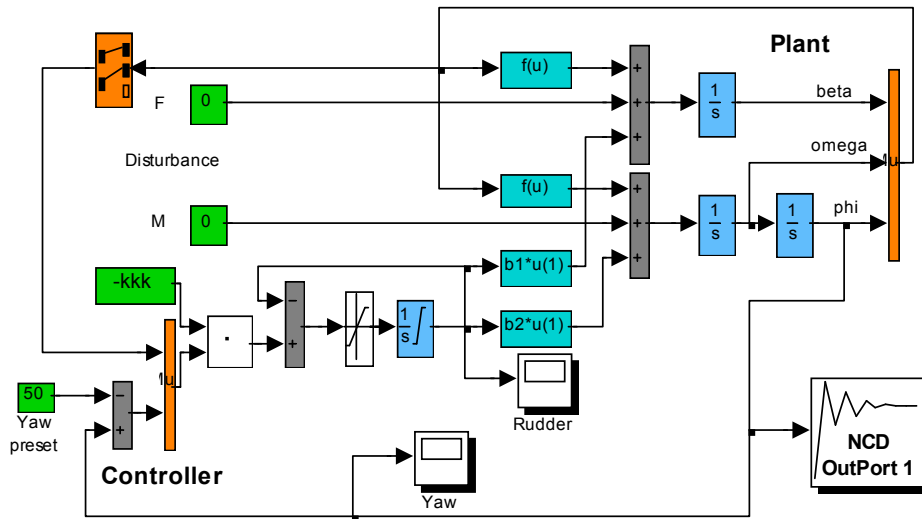


Рис. 2.

До начала процесса оптимизации необходимо задать начальное приближение для величин γ_i . Для этого настраиваемым переменным присвоены следующие значения: gm1= 0.01, gm2= 0.02, gm3= 0.03.

В результате оптимизации для скорости хода $V = 10 \text{ м/с}$ получены следующие значения величин:

$$gm1=0.2347; gm2=0.1206; gm3=-0.3097.$$

Им соответствует следующие коэффициенты регулятора: $k_1 = 4.6283$, $k_2 = -1.9283$, $k_3 = 0.9432$.

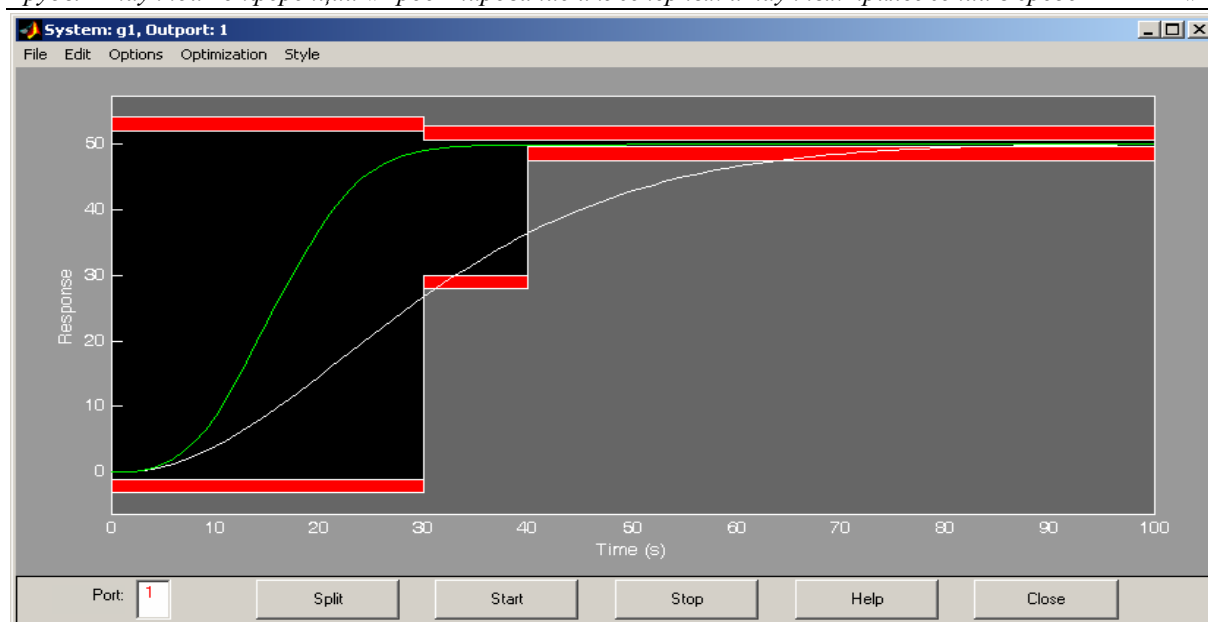


Рис. 3.

На рис.3 представлено окно блока NCD Outport, на котором заданы ограничения, соответствующие представлениям пользователя о желаемом качестве процесса перехода по курсу. Здесь же приведены графики зависимости от времени регулируемой координаты для начального (белый цвет) и оптимального (зеленый цвет) набора варьируемых параметров.

Литература

1. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства.— М.: Машиностроение. 1976.
2. Веремей Е. И. Обеспечение заданной степени устойчивости регуляторами с неполной информацией // Известия АН СССР. Техн. кибернетика.— 1986.— № 4.— С.123–130.
3. Zubov B. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.
4. Zubov B. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования.— Л., Машиностроение, 1974.
5. Дидук Г. А. и др. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления.— М.: Наука, 1984.

Приложение

Нетрудно убедиться, что корни следующих квадратных трехчленов вида $\Delta(s) = s^2 + a^1 s + a^0$ со следующими коэффициентами:

1. $a^1 = 2\alpha + \gamma_1^2$, $a^0 = \alpha^2 + \alpha\gamma_1^2 + \gamma_2^2$, $\forall \gamma_1, \gamma_2$;
2. $a^1 = 2\alpha + \gamma_1^2 + 2|\gamma_2|\cos\beta$, $a^0 = \alpha^2 + \alpha\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\alpha|\gamma_2|\cos\beta$, $\forall \gamma_1, \gamma_2$;
3. $a^1 = 2\alpha + 2\gamma_1^2$, $a^0 = \alpha^2 + 2\gamma_1^2\alpha + f(\gamma_2)(\psi^2(\gamma_1^2) + \gamma_1^4)$, $\forall \gamma_1, \gamma_2$,

$f(\cdot):(-\infty, +\infty) \rightarrow (0,1): \exists f^{-1}(\cdot)$

принадлежат областям $C_{\Delta 1}$, $C_{\Delta 2}$, $C_{\Delta 3}$ соответственно.

Покажем это на примере простейшего первого варианта.

Пусть мы имеем любые два действительных корня s_1 и s_2 квадратного трехчлена $\Delta(s)$, принадлежащие области $C_{\Delta 1}$. Очевидно, что их можно представить в виде $s_1 = -\alpha - m + \sqrt{p}$, $s_2 = -\alpha - m - \sqrt{p}$, где $m \geq 0$ и $p \geq 0$ — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $\sqrt{p} \leq m$. Поскольку $p \geq 0$, то $(\sqrt{p})^2 = k^2$, где k — вещественное число. При этом указанный квадратный трехчлен представляется выражением

$$\Delta(s) = s^2 + 2(\alpha + m)s + \alpha^2 + 2\alpha m + m^2 - k^2.$$

Теперь пусть мы имеем любую комплексно сопряженную пару корней s_1 и s_2 квадратного трехчлена $\Delta(s)$, принадлежащую области $C_{\Delta 1}$. Эту пару можно представить в виде $s_1 = -\alpha - m + \sqrt{p}$, $s_2 = -\alpha - m - \sqrt{p}$, где $m \geq 0$ и $p < 0$ — произвольные вещественные числа. Поскольку $p < 0$, то $(\sqrt{p})^2 = -k^2$, где k — вещественное число. В этом случае квадратный трехчлен принимает вид

$$\Delta(s) = s^2 + 2(\alpha + m)s + \alpha^2 + 2\alpha m + m^2 + k^2.$$

Заметим, что и в первом, и во втором случае, слагаемые $m^2 - k^2$ и $m^2 + k^2$ можно трактовать, как произвольное положительное вещественное число, которое можно обозначить, как γ_2^2 , где γ_2 — любое вещественное число. Тогда, вводя обозначение $m = \gamma_1^2 / 2$, где γ_1 — также любое вещественное число, рассматриваемый квадратный трехчлен, независимо от характера расположения его корней в области $C_{\Delta 1}$, можно представить в следующем виде

$$\Delta(s) = s^2 + (2\alpha + \gamma_1^2)s + \alpha^2 + \alpha\gamma_1^2 + \gamma_2^2,$$

где γ_1 и γ_2 — произвольные вещественные числа. Его корни при любых заданных γ_1 , γ_2 определяются выражениями

$$s_{1,2} = -\alpha - \frac{\gamma_1^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma_1^4}{4} - \gamma_2^2}$$

и при условии $\gamma_2 \leq \gamma_1^2 / 2$ являются действительными, а при условии $\gamma_2 > \gamma_1^2 / 2$ — комплексно сопряженными.

Таким образом, каждой паре координат вида $(\gamma_{2i-1}, \gamma_{2i})$, $i = \overline{1, [n_d/2]}$ n_d -мерного вектора параметров γ можно поставить в соответствие пару комплексных чисел, принадлежащих области C_{Δ} , выбором которой определяются соответствующие формулы для коэффициентов $a_i^1(\gamma)$, $a_i^2(\gamma)$.

Пусть $\tilde{\Delta}^*(s, \gamma) = \prod_{i=1}^d (s^2 + a_i^1(\gamma)s + a_i^0(\gamma))$, тогда все корни полинома

$$\Delta^*(s, \gamma) = \begin{cases} \tilde{\Delta}^*(s, \gamma), & \text{если } n_d = 2d; \\ (s + a_{d+1}(\gamma, \alpha))\tilde{\Delta}^*(s, \gamma), & \text{если } n_d = 2d + 1, \end{cases}$$

где $d = \lfloor n_d / 2 \rfloor$, $a_{d+1}(\gamma) = \alpha + \gamma_{2d+1}^2$, принадлежат области C_Δ , и обратно, если все корни некоторого полинома $\Delta(s)$ принадлежат этой области, то можно указать такой вектор $\gamma \in E^{n_d}$, что справедливо тождество $\Delta(s) \equiv \Delta^*(s, \gamma)$.

Листинг 1.

```
function res=par2roo2(g,alpha,beta);
% par2roo2(g,alpha,beta)
% Функция, генерирующая вектор комплексных чисел,
% с длиной, совпадающей с длиной вектора
% произвольных вещественных параметров g.
% Все полученные комплексные числа
% принадлежат области на комплексной плоскости,
% ограниченной графиком линейной функции
% +/-tan(beta)*(-alpha-x) для x<=-alpha, alpha>=0, beta в радианах
%
% См. также par2roo1, par2roo3, roo2par3

sg=length(g);
hsg=floor(sg/2);

roo=zeros(size(g));
for k=1:hsg
    g1=g(2*k-1);
    g2=g(2*k);
    a1=2*alpha+g1*g1+2*abs(g2)*cos(beta);
    a0=g2*g2+alpha*g1*g1+alpha*alpha+alpha*2*abs(g2)*cos(beta);
    roo(2*k-1:2*k)=roots([1 a1 a0]);
end;
if (hsg~=sg/2)
    roo(sg)=-alpha-g(sg)*g(sg);
end;

res=roo;
```

ОБОСНОВАНИЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ ЖЕСТКОГО ВАЛА С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATLAB

Воронков В. С.,

ГУ «НИИ прикладной математики и кибернатики ННГУ», Нижний Новгород,

e-mail: voronkov@pmk.unn.runnet.ru

Кривицкая А. В.

Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород,

e-mail: ann_krivitsky@mail.ru

С помощью системы MATLAB дается обоснование децентрализации управления в магнитном подвесе жесткого вала. Исходными данными для решения этой задачи являются аналитически найденные уравнения движения вала. Закон нелинейного робастного управления токами в электромагнитах учитывает связь угловых степеней свободы, обусловленную гироскопическим эффектом. Рассматривается диапазон скоростей вращения вала от нулевой до скорости гироскопической стабилизации. Выбор параметров децентрализованного управления и приемлемой динамики вала в таком магнитном подвесе проводится в интерактивном режиме на ПК. Критериями выбора являются размеры области притяжения стабилизируемого состояния равновесия и расход ресурсов управления в процессе приведения вала в это состояние из допустимых начальных условий. Наглядность представления динамики вала достигается визуализацией результатов расчета с помощью 3D анимации, 2D диаграмм контроля расхода ресурсов управления и осциллограмм переходных процессов для всех переменных состояния и ограниченных управлений.

Введение

В настоящее время широкое распространение получил магнитный подвес вала, содержащий один осевой и два радиальных активных магнитных подшипника (АМП) [1]. Для обеспечения устойчивости неконтактного положения вала в АМП необходимо управление силами притяжения электромагнитов. В общем случае децентрализованное управление не гарантирует устойчивости [2], поэтому его использование требует обоснования. Таким обоснованием может быть доказательство робастности, или сохранения свойства устойчивости при децентрализации законов управления, синтезированных по математической модели объекта и выбранным показателям качества динамики управляемых систем. В [3] найден закон нелинейного робастного управления радиальными АМП, оптимальный по кри-

торию максимальной экономии ресурсов управления [4]. Анализ динамики вала в радиальных АМП с найденным законом управления показал:

- возможность стабилизации вала в радиальных АМП в диапазоне скоростей вращения от нулевой до скорости гироскопической стабилизации его угловых степеней свободы;
- робастность синтезированного закона управления к секторному заданию ограниченных функций, включая релейный закон управления;
- существование многообразия начальных условий в фазовом пространстве, при которых возникает скользящий режим релейной системы с отсутствием расхода ресурсов управления.

Целью данной работы является исследование робастности найденного в [3] закона управления по отношению к его децентрализации. Необходимость децентрализации управления диктуется, как правило, требованиями простоты и унификации регуляторов, используемых в разрабатываемых системах управления. Система управления радиальными АМП содержит 4 пары электромагнитов, децентрализованное управление которыми предлагается делать по 4-м независимым каналам, аналогичным каналу управления осевого АМП вала.

1. Функциональная схема магнитного подвеса вала с децентрализованным управлением.

Построение децентрализованного управления в магнитном подвесе вала поясняется на рис. 1. Система децентрализованного управления АМП содержит канал осевой стабилизации вала 1, состоящий из датчика зазора 2, регулятора 3, электромагнита 4. Радиальная стабилизация вала осуществляется в этом случае с помощью 4-х идентичных каналов, аналогичных каналу осевой стабилизации. Два канала системы радиальной стабилизации вала изображены в плоскости рис.1. Другие два канала расположены в ортогональной плоскости. Каждый канал радиальной стабилизации вала 1 состоит из датчика зазора 5, регулятора 6 и пары электромагнитов 7, диаметрально расположенных относительно вала. Пояснение и более детальное описание одного из каналов системы радиальной стабилизации вала приводится на рис.2. В результате разделения общего регулятора на 4 идентичных, работающих по принципу локальной обратной связи, достигается унификация элементов всей системы стабилизации вала. При децентрализованном управлении каждый канал системы стабилизации магнитного подвеса вала 1, включая и канал осевой стабилизации, содержит датчики зазора δ и тока I , ПД-регулятор 6 от датчика зазора чувствительностью α и отрицательную обратную связь по току электромагнита от датчика тока чувствительностью γ . Суммарный сигнал регулятора σ подается на

вход усилителя мощности с коэффициентом усиления по напряжению β , нагрузкой которого являются катушки электромагнитов.

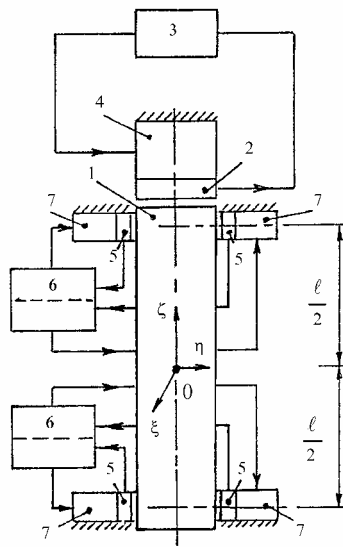


Рис. 1.

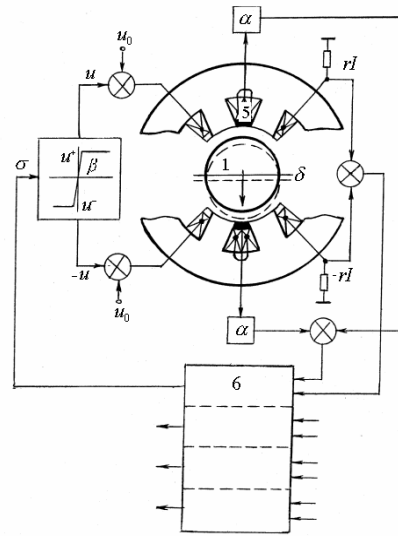


Рис. 2.

Действие системы стабилизации в этом случае состоит в автоматическом управлении силами притяжения электромагнитов с целью стабилизации каждого из зазоров δ вал — электромагнит в отдельности.

2. Математическая модель объекта и системы управления.

В математической модели используются уравнения движения вала под действием сил притяжения электромагнитов. Эти уравнения линеаризуются в окрестности стабилизируемого состояния равновесия. Управление выбирается в виде простейших кусочно-линейных функций $u(\sigma)$, аппроксимирующих реальные вольт-амперные характеристики усилителей мощности. Математическая модель динамики жесткого вала в радиальных АМП [1] с одной стороны упрощается за счет пренебрежения инерционностью электромагнитов, а с другой — усложняется за счет учета гироскопического эффекта. Пренебрежение инерционностью электромагнитов позволяет считать, что зависимость токов в электромагнитах повторяет нелинейные характеристики выходного напряжения усилителя мощности, т. е. $I = u(\sigma)/R$. Учет гироскопического эффекта от осевого вращения вала приводит к появлению взаимосвязи переменных состояния в двух ортогональных вертикальных плоскостях. Для невращающегося вала они являются независимыми. В результате математическая модель динамики объекта управления может быть представлена в стандартном безразмерном виде [3]

$$\dot{x} = Ax + Bu(\sigma), \quad \sigma = Cx \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+k}{2} & 0 & \frac{1-k}{2} & 0 & 0 & -\frac{H}{2} & 0 & \frac{H}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-k}{2} & 0 & \frac{1+k}{2} & 0 & 0 & \frac{H}{2} & 0 & -\frac{H}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H}{2} & 0 & -\frac{H}{2} & \frac{1+k}{2} & 0 & \frac{1-k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{H}{2} & 0 & \frac{H}{2} & \frac{1-k}{2} & 0 & \frac{1+k}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1+k}{2} & -\frac{1-k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1-k}{2} & -\frac{1+k}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+k}{2} & -\frac{1-k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-k}{2} & -\frac{1+k}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где x — вектор переменных состояния, u — вектор функций управления, зависящих от σ — вектора линейной обратной связи по состоянию полностью наблюдаемого объекта, безразмерные параметры $k = \frac{ml^2}{4J}$, $H = \frac{J_0 \Omega t_m}{J}$ характеризуют распределение масс осесимметричного вала с осевым J_0 и поперечным J моментами инерции, вращающегося со скоростью Ω в радиальных АМП, симметрично расположенных от центра подвеса на расстоянии l . (Для вала, распределение масс которого близко к однородному цилиндру длиной l , параметр $k \approx 3$).

Переменные состояния жесткого вала, вращающегося в радиальных АМП, задаются в виде локальных значений воздушных зазоров ξ_i η_i и скоростей их изменения в местах расположения диаметрально расположенных пар электромагнитов в верхнем ($i=1$)

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\delta_m}; \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt} t_m; \quad x_5 = \frac{\eta_1}{\delta_m}; \quad x_6 = \frac{dx_5}{dt} t_m;$$

и в нижнем ($i=2$)

$$x_3 = \frac{\xi_2}{\delta_m}; \quad x_4 = \frac{dx_3}{dt} t_m; \quad x_7 = \frac{\eta_2}{\delta_m}; \quad x_8 = \frac{dx_7}{dt} t_m;$$

радиальных АМП, как показано на рис. 3 и как в дальнейшем представляется анимация динамики вала.

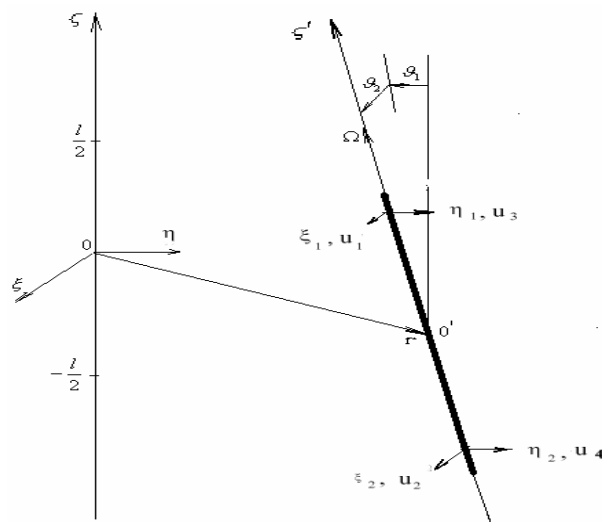


Рис.3.

Переход к безразмерному виду переменных достигается с помощью масштабов переменных, аналогичных используемых в [1]

$$\delta_m = \frac{bI_m}{a}; \quad I_m = Ru_m = u^+; \quad t_m = \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

Здесь m — масса вала, a, b — крутизны силовых характеристик пары электромагнитов к изменениям зазора и тока, I_m, u_m — максимальные значения тока и напряжения на паре электромагнитов, взаимосвязь которых подчиняется закону Ома (R — сопротивление обмоток). Изменение скорости вращения вала предполагается достаточно медленным (по сравнению с введенным масштабом времени), поэтому коэффициент H считается постоянным параметром, который выбирается из диапазона

$$0 \leq H < 2\sqrt{k} \quad (2)$$

отсутствия гироскопической стабилизации угловых степеней свободы вала. Нелинейное робастное управление таким объектом, найденное в [3] определяет матрицу

$$C(H)^{opt} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 + \frac{\rho}{k} & 0 & 1 - \frac{\rho}{k} & 0 & -\frac{H}{2k} & 0 & \frac{H}{2} \\ 0 & 1 - \frac{\rho}{k} & 2 & 1 + \frac{\rho}{k} & 0 & \frac{H}{2k} & 0 & -\frac{H}{2k} \\ 0 & \frac{H}{2k} & 0 & -\frac{H}{2k} & 2 & 1 + \frac{\rho}{k} & 0 & 1 - \frac{\rho}{k} \\ 0 & -\frac{H}{2k} & 0 & \frac{H}{2k} & 0 & 1 - \frac{\rho}{k} & 2 & 1 + \frac{\rho}{k} \end{pmatrix} \quad (3)$$

оптимальной обратной связи по всем переменным состояния, где ρ — положительная реальная часть корней характеристического уравнения объекта (1) в отсутствие управления. Найденный закон ограниченного управления неустойчивым объектом (1) является адаптивным к скорости вращения вала и обеспечивает оптимальную по устойчивости его динамику в радиальных АМП. Реализация этого закона требует разработки достаточно сложного централизованного регулятора, учитывающего специфику объекта.

3. Децентрализация управления и постановка задачи

Предлагаемые децентрализация управления и разработка децентрализованных регуляторов в системе стабилизации магнитного подвеса вала основаны на математической модели (1)–(3), позволяющей достаточно просто перейти от обратной связи по всем переменным состояния к локальным обратным связям. Действительно, общая система радиальной стабилизации вала легко разбивается на 4 канала, если в матрице (3) все элементы, соответствующие перекрестным обратным связям, сделать равными нулю. В результате получается матрица децентрализованного управления

$$C_d = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 + \frac{\rho}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 + \frac{\rho}{k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 + \frac{\rho}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 + \frac{\rho}{k} \end{pmatrix} \quad (4)$$

соответствующая ПД-регулятору в каждом канале локальной обратной связи зазор — сила притяжения электромагнитов, аналогично каналу осевой стабилизации магнитного подвеса [4].

Целями работы являются:

1. исследование робастности нелинейного робастного управления, синтезированного в [3], к изменению структуры регулятора, связанному с децентрализацией;
2. обоснование такой децентрализации ограниченного управления радиальными АМП вала;
3. выбор параметра ρ в матрице (4), соответствующего постоянной времени дифференцирования ПД-регулятора;

Критериями проводимого обоснования в порядке их значимости выбираются:

- асимптотическая устойчивость стабилизируемого состояния равновесия, в которое помещено начало координат переменных состояния;
- допустимые отклонения переменных состояния от начала координат;
- расход ресурсов управления в процессе приведения вала из допустим начальных условий в начало координат.

Решение этой задачи проводится моделированием динамики вала средствами MATLAB [5] на основании аналитически найденных уравнений движения (1)–(2) и сравнительного анализа динамики при централизованном (3) и децентрализованном (4) управлениях в интерактивном режиме вычисления на ПК. Для проведения вычислений, связанных с расчетом динамики жесткого вала в радиальных АМП, созданы программы в системе MATLAB. Они позволяют по заданным значениям параметров находить решения системы дифференциальных уравнений и визуализировать результаты расчетов. В частности, для наглядного представления процесса приведения вала в стабилизируемое состояние равновесия при ненулевых начальных условиях проводится визуализация результатов расчета с помощью 3D анимации движения вала и 2D диаграмм расхода ресурсов управления.

4. Сравнительный анализ динамики вала в радиальных АМП

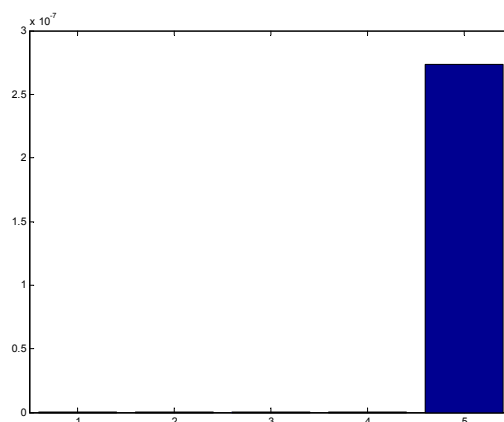
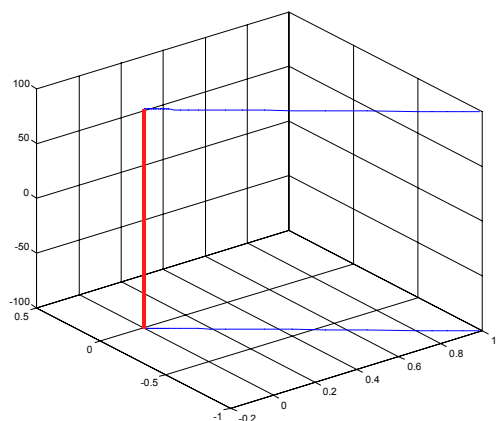
Программа визуализации движения вала в радиальных АМП использует систему координат, представленную на рис.3. Фрагмент этой программы приводится ниже

```
%visualisation
%*****
ap=avifile('mult3.avi');
J=0;
for J=50:5:(size_t-1)
    fl=figure(4),
    grid on,plot3(y(1:J,1),y(1:J,5),z(1:J)),hold on,
    plot3(y(1:J,3),y(1:J,7),-z(1:J)),hold on,grid on,
    line([y(J,1) y(J,3)],[y(J,5) y(J,7)],[z(J) -z(J)], 'LineWidth',4,'Color',[1.0,0.1,0.1]),hold off;
    ap=addframe(ap,getframe(fl));
end
ap=close(ap);
%visualisation end
%*****
```

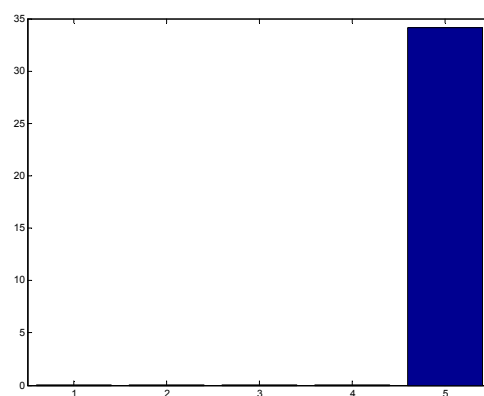
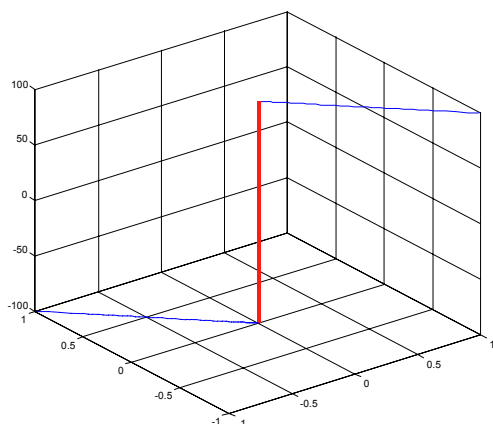
Далее приводятся иллюстрации результатов расчета динамики вала при выборе ненулевых начальных условий, различных значений параметра H и фиксированных параметрах $k = 3$, $\beta = 10$ для двух вариантов 1 — централизованного и 2 — децентрализованного управлений. Слева указаны траектории движения торцов вала, приводимого системой радиальной стабилизации в стабилизируемое состояние равновесия для начальных условий, соответствующих допустимым отклонениям центра масс и угловому отклонению относительно центра масс. Справа приведены диаграммы 1–4 потребляемой электромагнитами мощности в соответствующих каналах и суммарной энергии, потребляемой электромагнитами в процессе приведения вала в состояние равновесия — диаграмма 5.

1. Централизованное управление.

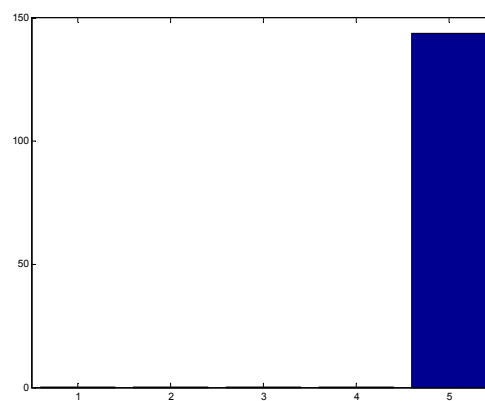
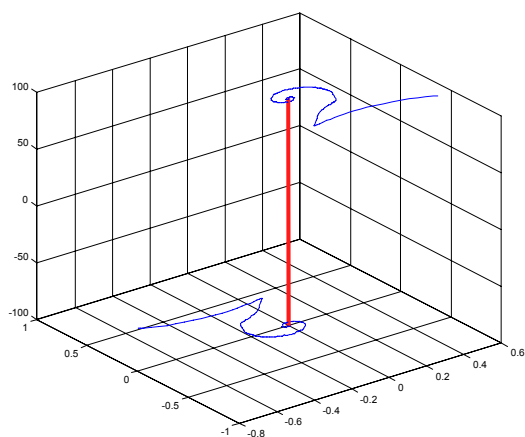
А. $H=0$ — 3.3; $Y_0=[0.99;-0.99;0.99;-0.99;0.99;-0.99;0.99;-0.99]$;



Б. $H=0$; $Y_0=[0.99;-0.99;-0.99;0.99;-0.99;0.99;0.99;-0.99]$;

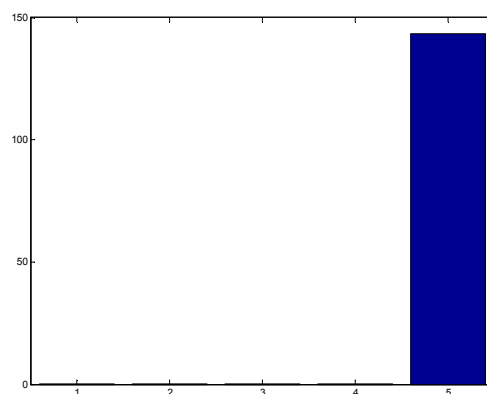
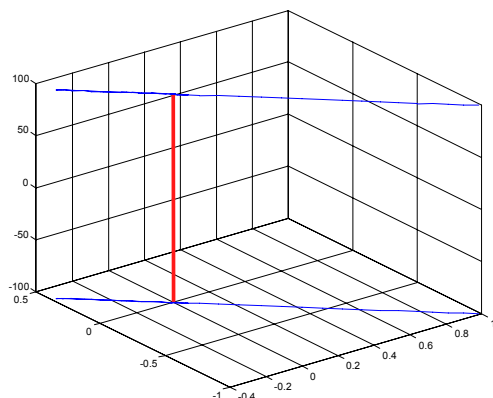


В. $H=3.3$; $Y_0=[0.52;-0.52;-0.52;0.52;-0.52;0.52;0.52;-0.52]$;

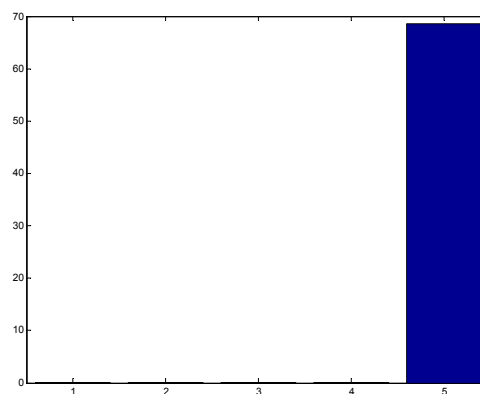
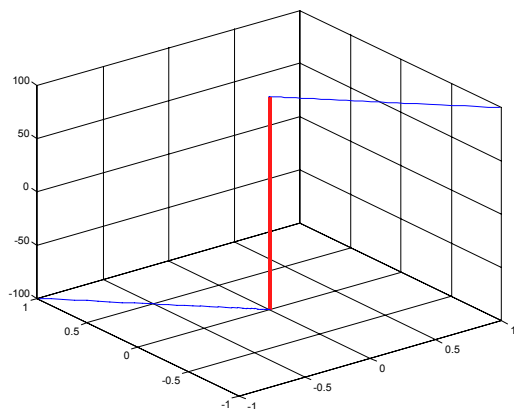


2. Децентрализованное управление.

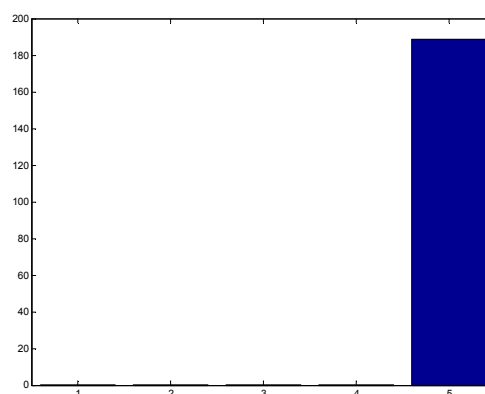
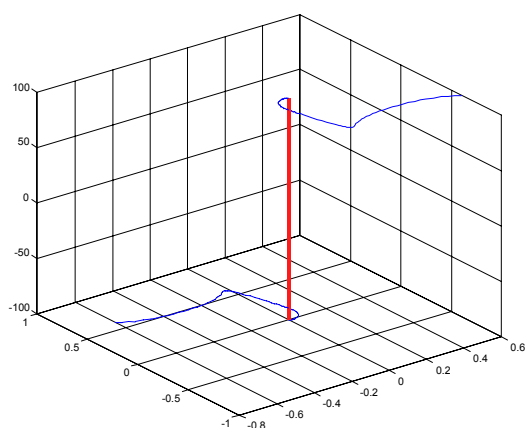
А. $H=0$ — 3.3; $\rho = 0.5268$; $Y_0=[0.99;-0.99;0.99;-0.99;-0.99;0.99;-0.99;0.99]$;



Б. $H=0$; $\rho = 0.5268$; $y_0=[0.99;-0.99;-0.99;0.99;-0.99;0.99;0.99;-0.99]$;



В. $H=3.3$; $\rho = 0.5268$; $y_0=[0.6;-0.6;-0.6;0.6;-0.6;0.6;0.6;-0.6]$;



5. Обсуждение полученных результатов

Централизованное управление является адаптивным к изменениям скорости вращения вала (параметр H). Его использование при определенных начальных условиях (1-А) позволяет достигать минимум расхода ре-

сурсов. Переход к децентрализованному управлению требует подбора фиксированного параметра ρ ПД-регулятора, который проводился по критериям асимптотической устойчивости стабилизируемого состояния равновесия и допустимым отклонениям от него. Приемлемая динамика вала по этим критериям (сравнение 1-В и 2-В) достигнута при выборе параметра $\rho = 0.5268$, равного его значению при централизованном управлении у границы начала гироскопической стабилизации угловых степеней свободы вала ($H=3.3$). Однако, по расходу ресурсов (сравнение 1-А, Б, В и 2-А, Б, В) децентрализованное управление проигрывает по сравнению с централизованным во всех вариантах.

Заключение

Созданное программное обеспечение в системе MATLAB позволяет в интерактивном режиме проводить сравнительный анализ динамики жесткого вала в магнитном подвесе при централизованном и децентрализованном управлениях с целью обоснованного выбора приемлемых динамики вала и расхода ресурсов управления. Данная задача становится особенно актуальной с ростом мощности магнитного подвеса, когда возникает альтернатива упрощения системы управления и потребляемой магнитным подвесом мощности. Кроме того, проведенное исследование показало робастность синтезированного управления радиальными АМП к децентрализации, а также существенность влияния на нелинейную динамику вала даже малого гироскопического эффекта, т. е. при скоростях вращения вала до гироскопической стабилизации его угловых степеней свободы, как при централизованном, так и децентрализованном управлениях.

Литература

1. Воронков В. С. Стабилизация вала в активных магнитных подшипниках // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1991.— №4.— С.63–70.
2. Dhar D., Barrett L. E., Knospe C. R. Optimum design of decentralized magnetic bearings for rotor system // Proc. 3-rd Int. Symp. on Magnetic Bearings.— Technomic Pub. Co., 1992.— P.47.
3. Воронков В. С., Кривицкая А. В. Стабилизация жесткого вала в радиальных АМП при минимальном расходе ресурсов управления // Сб. науч. статей юбилейной науч.-техн. конф. ф-та ВМК ННГУ и НИИ ПМК.— Нижний Новгород, 2003.— С.85–89.
4. Воронков В. С. Критерий максимальной экономии ресурсов управления и его достижение в скользящем режиме релейной системы // Избранные труды 2-й международной конф. по проблемам управления.— М.: ИПУ РАН, 2003.— Т.1.— С.99–103.
5. Потемкин В. Г. Система MATLAB. Справочное пособие.— М.: Диалог-МИФИ, 1997.— 350 с.

УДК 681.5:681.3

ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГООБЪЕКТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (ПС «МОМДИС») НА ОСНОВЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ ИГРОВЫХ РЕШЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В СЛОЖНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Воронов Е. М., Ворожищев А. С., Карпунин А. А., Репкин А. Л.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва,

e-mail: avorozhischev@croc.ru, ksans@yandex.ru, rio@bmstu.kaluga.ru

Серов В. А.

Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Москва

1. Введение

Развиваемые игровые подходы управления в условиях конфликта являются основными в одном из классов задач теории оптимального управления. Проблема взаимодействия объектов (коалиций) возникает при прямом формировании многообъектной многокритериальной системы (ММС) в физической модели конфликтной ситуации, при структуризации классической однообъектной и однокритериальной задачи управления с формированием ММС с элементами конфликтности в процессах согласования и координации в структуре, а также при представлении сложной задачи и системы многоуровневой структурой.

В рамках ММС формируется класс задач оптимизации, в котором известные подходы оптимизации объекта (вариационные подходы, принцип максимума, методы динамического программирования и процедуры нелинейного программирования) существенно дополняются игровыми подходами с собственными принципами оптимизации, методы решения которых базируются на многообъектности структуры, многокритериальности задач и свойствах конфликтного взаимодействия объектов при проектировании и управлении ММС. При этом используется набор методов оптимизации ММС как основа теории оптимального управления ММС, занимающей промежуточное место между классической теорией управления и теорией оптимизации решений в многоуровневых системах [1–3, 6].

Предлагаемая разработка способов управления ММС, имеющих свойства устойчивости (стабильности) и эффективности в конфликте и кооперации и обеспечивающих компромиссы на тактической и информационной основе с элементами интеллектуализации, является актуальной в теории управления ММС.

2. Математическое описание ММС

Математическое описание ММС включает в себя четыре основные компоненты: математическую модель ММС, с выбором описания и управляющих сил; векторный целевой показатель; коалиционную структуру ММС; принципы конфликтного взаимодействия на основе стабильности и эффективности [3].

1. В качестве основного описания ММС принимается система динамико-алгебраических связей, характеризующая динамические связи (а), алгебраические связи (б), вектор выхода (в) и функцию принятия решения и управления (г):

$$\begin{cases} \dot{x}^o = f(t, x, q, u_1, \dots, u_N), & x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} x^a = (t, x, q, u_1, \dots, u_N), & x \in X, \end{cases} \quad (1б)$$

$$\begin{cases} y = y(x, q, t), & q \in Q, \end{cases} \quad (1в)$$

$$\begin{cases} u = u(t, x, u, q), & u \in U, \end{cases} \quad (1г)$$

где N — число объектов в ММС; $x = (x^o, x^a)$ — вектор состояния ММС с x^o — динамическими и x^a — алгебраическими состояниями; y — вектор выхода ММС; $u \in U$ — вектор управления ММС; $q \in Q$ — вектор параметров ММС, которые характеризуют параметрическую неопределенность в (1а, б, в) и возможную параметризацию в (1г).

Управление $u \in U = U_1 \times \dots \times U_N$, $u_i \in U_i$ — подвектор управления i -м объектом ММС; U_i , как правило, выпукло и компактно.

Программно-корректируемый закон управления (ПКЗУ) при заданном разбиении отрезка $[t_0, T]$ с малым $\Delta t = t_j - t_{j-1}$

$$u_i(\cdot) = \{u_s(\cdot)\}; \quad u_s(\cdot) = \sum_{j=1}^l u_{sj}(x(t_{j-1}), t) 1[t_j - t_{j-1}], \quad t_l = T,$$

где $u_{sj}(x(t_{j-1}), t) = u_{sj}(t)$ — допустимое программное управление $u_s \in U_{sj}$ на отрезке $[t_{j-1}, T]$ при известном начальном условии $x(t_{j-1})$ и реализуемое на $t \in [t_{j-1} - t_j]$.

2. Целевые свойства ММС характеризуются вектором показателей

$$J = J[x_0, t_0, T, q, x(\cdot), u(\cdot), y(\cdot)],$$

который представляет собой сложную функциональную связь с указанными величинами. Типичным видом i -й функции выигрыша (потерь) является функционал на $t_0 \leq t \leq T$

$$J_i(u_1, \dots, u_N) = \Phi_i(T, x(T)) + \int_{t_0}^T F_i(t, x, u_1, \dots, u_N) dt, \quad i = \overline{1, m}.$$

3. Пусть $P = (P^\partial, P^u)$ — коалиционная структура действий и интересов с размерностью m_k множества M_k индексов коалиций в каждой P^∂ , где $M_k = \overline{1, m_k}$. Тогда

$$P^\partial = \left\{ K_1^\partial, \dots, K_{m_r}^\partial \left| K_i^\partial \cap K_j^\partial = \emptyset; \bigcup_{i \in M_k} K_i^\partial = R = [1, r] \right. \right\},$$

где r — размерность множества индексов вектора параметров (после параметризации управлений) или множество индексов управлений (без параметризации)

$$P^u = \left\{ K_1^u, \dots, K_{m_m}^u \left| K_i^u \cap K_j^u = \emptyset; \bigcup_{i \in M_k} K_i^u = M = [1, m] \right. \right\},$$

где m — размерность множества индексов вектора показателей.

В свою очередь, каждой K_i^∂ соответствует, например, при полной параметризации вектор параметров q^i или вектор u_i (без параметризации). Каждой K_i^u соответствует целевой вектор

$$P^\partial = P^u = P = \left\{ K_1, \dots, K_{m_k} : K_i \cap K_j = \emptyset; \bigcup_{j=1}^{m_k} K_j = [R, M] \right\}.$$

4. В общем случае имеют место пять принципов конфликтного взаимодействия: антагонизм; бескоалиционное взаимодействие; коалиционное взаимодействие; кооперативное взаимодействие; иерархическое взаимодействие (с правом первого хода).

Как известно, в данных принципах конфликтного взаимодействия заложены три фундаментальных понятия теории игр: *стабильность*, *эффективность* и *стабильно-эффективный компромисс*.

Стабильность ММС — обеспечение устойчивых (равновесных) процессов функционирования и проектирования многообъектных структур в условиях конфликтности (несогласованности) и/или неопределенности.

Эффективность ММС — достижение максимального целевого качества объектов, коалиций и ММС в целом на основе устойчивого и рационального коалицирования.

Стабильно-эффективный компромисс в ММС (СТЭК ММС) — это объединение стабильности и эффективности в рамках множества решений: от полного совпадения данных свойств до обеспечения определенной степени сближения в условиях информационно-тактических расширений соглашений.

Данные в [3] определения стабильных и эффективных решений (скалярное Нэш-равновесие, векторные равновесия, угрозы-контругрозы (УКУ), векторно-оптимальные решения по Парето и конусу, дележ по Шепли и т. д.) позволили разработать методы модификации и поиска этих решений на основе вновь созданного математического и алгоритмического обеспечения.

3. Состав, назначение и возможности ПС «МОМДИС»

Назначение ПС «МОМДИС» — оптимизация управления, проектирование и моделирование в технических, экономических, экологических, биомедицинских, социальных и других процессах и системах. В рамках ПС возможно исследование взаимодействия до четырех коалиций: размерность векторного целевого функционала ≤ 12 ; порядок вектора состояния ≤ 50 ; порядок вектора управления ≤ 20 ; число компонент вектора измеряемого выхода для вычисления векторного целевого функционала ≤ 12 .

В ПС «МОМДИС» на основе достижений теории игр и теории управления реализованы оригинальные, модифицированные и классические методы получения стабильных (равновесных) и эффективных (векторно-оптимальных) решений, а также полученные комбинации данных методов в виде стабильно-эффективных компромиссов, расширенные активными равновесиями, рассмотренными в [3, 10, 11].

ПС «МОМДИС» позволяет проектировать в интерактивном режиме параметризованные программно-корректируемые законы управления сложных систем, функционирующих в условиях:

- 1) исходной структурной несогласованности (взаимодействие подсистем сложной системы);
- 2) конфликта (конфликтное взаимодействие коалиций динамических объектов);
- 3) различного рода неопределенности.

ПС «МОМДИС» состоит из совокупности двух взаимосвязанных подсистем:

- 1) подсистемы пользовательского интерфейса;
- 2) математической подсистемы.

Математическая подсистема реализована в математическом пакете MATLAB и состоит из необходимых для проектирования подсистем моделирования и оптимизации. Пользовательский интерфейс на основе GUI-интерфейса позволяет гибко управлять процессом проектирования и получать полную информацию в виде графиков и таблиц. После введения в ПС динамической модели сложной системы в виде набора коалиционных структур на множестве взаимодействующих объектов управления производится оптимизация управления многообъектной системой по заданному вектору показателей.

Подсистема оптимизации содержит ряд модулей, которые отдельно и в совокупности позволяют найти оптимальное управление или закон управления при бескоалиционном, коалиционном и кооперативном взаимодействии объектов на основе методов оптимизации по Нэшу, Парето, Шепли, по методу «угроз и контругроз» и др. Проектировщик имеет возможности комбинировать решения для получения стабильно-эффективных компромиссов. Для выбора начальных приближений применяется модуль

сетевого глобального анализа, поэтому алгоритмы приобретают двухэтапный характер. Для получения и отладки законов управления реализуется потактовая комбинация подсистемы моделирования и оптимизации.

Математическая подсистема ПС «МОМДИС» включает совокупность методов моделирования и оптимизации (рис. 1). В системе представлены различные методы интегрирования (Эйлера, Адамса второго и четвертого порядка, Рунге–Кутта второго, четвертого и шестого порядка, обобщение схемы Рунге–Кутта и др.). Каждый из методов применяется к своему классу задач, однако интерфейс организован таким образом, что разработчик в любой момент может использовать любой метод.

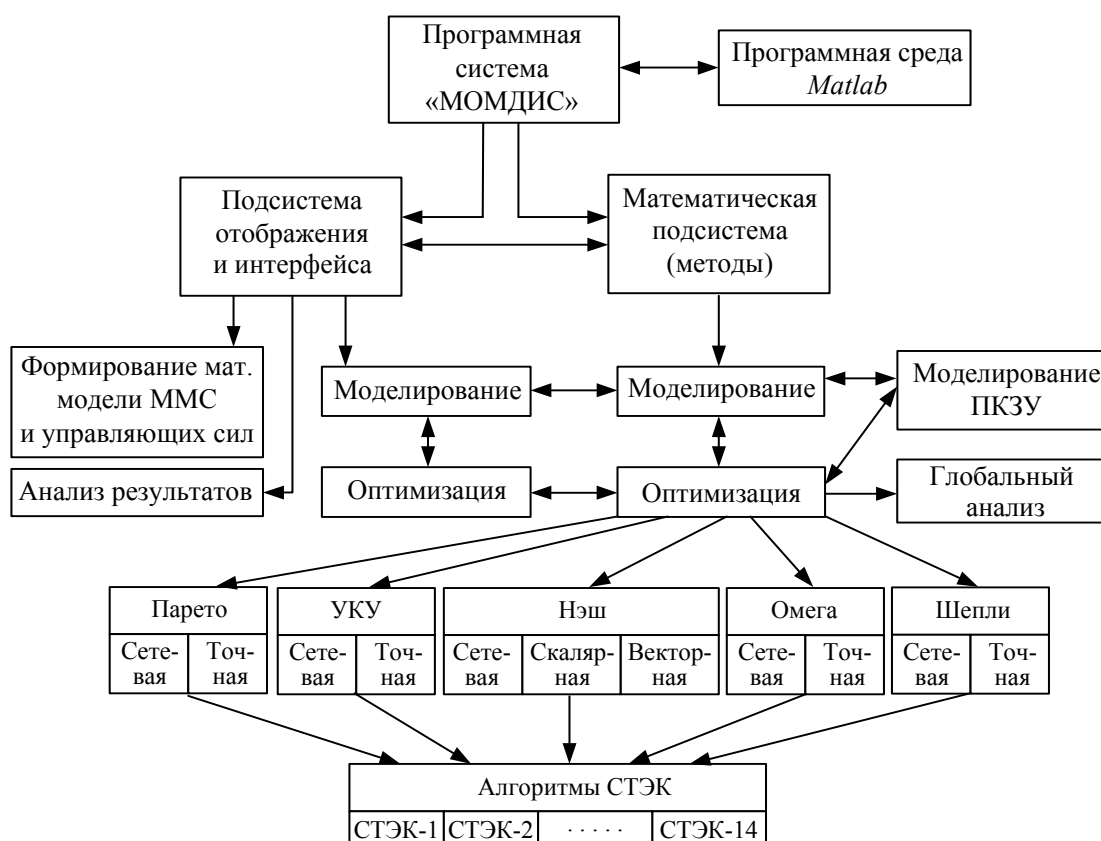


Рис. 1. Структура ПС «МОМДИС».

Функции имитационного моделирования реализуются в рамках математической подсистемы, когда на начальном этапе проектирования отлаживается математическая модель системы, далее исследуется влияние различных факторов на динамические свойства системы, а на заключительном этапе исследуются свойства системы в окрестности полученных оптимальных режимов.

В настоящее время для настройки параметров ПКЗУ и моделирования ПКЗУ ММС формируется последовательная процедура потактового моделирования, оптимизации и сетевых подходов. В ПС «МОМДИС» реализованы двухэтапные методы оптимизации ММС:

- глобальный анализ на основе сетевых методов;
- Нэш-оптимизация;
- Парето-оптимизация;
- УКУ-оптимизация;
- Ω -оптимизация;
- Шепли-оптимизация как комбинация Нэш- и Парето-подходов.

На основе комбинации Парето–Нэш–УКУ–Шепли-оптимизации ПС «МОМДИС» позволяет формировать ряд модифицированных стабильно-эффективных компромиссов в ММС.

Структурные элементы предложенных методов оптимизации базируются на следующих алгоритмах, реализованных в ПС:

- вычисление конуса доминирования и выбор направления спуска;
- вычисление шаговой длины внутри конуса;
- элементы шаговой оптимизации с линейными ограничениями (направление движения — по градиенту (аппроксимирующему градиенту), по методу возможных направлений, по методу Хука–Дживса; шаговая длина — дробление шага, параболическая интерполяция, метод золотого сечения, модификация дробления шага на случай разрывных показателей; определение состава активных ограничений; вычисление расстояния до границы допустимой области в данном направлении);
- использование стандартной подпрограммы симплекс-метода;
- численное дифференцирование (вектора по вектору, скаляра по вектору) (формирование односторонних, центральных разностей);
- организация штрафных итераций при наличии нелинейных ограничений;
- организация вычислений при варьировании подвектора параметров $q \in Q$ в алгоритме Нэш-оптимизации;
- элементы глобального анализа (генерация ЛП-последовательности, равномерно заполняющей допустимую область, или ортогональной последовательности; составление таблицы испытаний; Ω - или УКУ-оптимизация таблицы);
- вычисление значений векторного показателя.

На основе указанных алгоритмов, реализованных в среде *MATLAB*, согласно предложенной структуре (рис. 1) создана программная система «МОМДИС», имеющая как собственный интерфейс, так и различного рода модификации под конкретные виды задач.

4. Программная реализация

Оболочка ПС «МОМДИС» позволяет в режиме диалога изменять параметры системы, задавать начальные данные, выбирать методы моделирования и оптимизации, проектировать в интерактивном режиме парамет-

ризованные программно-корректируемые законы управления, производить обработку и анализ полученных результатов. Разработан многооконный пользовательский интерфейс. Переработана система отображения информации, которая позволяет одновременно просматривать необходимое количество графиков нескольких моделей и выполнять с ними необходимые действия по анализу результатов моделирования.

Самый верхний уровень оболочки в экранном представлении предлагает следующую пятиуровневую структуру (рис. 2):

- 1) задание математической модели ММС;
- 2) моделирование ММС;
- 3) оптимизация ММС;
- 4) моделирование ПКЗУ;
- 5) просмотр результатов.

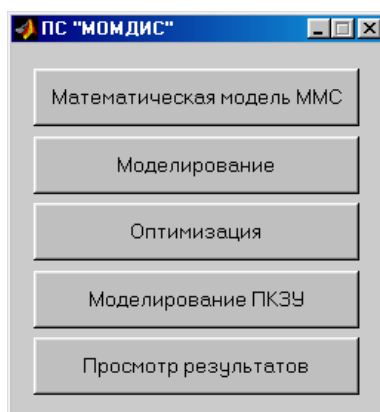


Рис. 2. Окно верхнего уровня ПС «ММДИС».

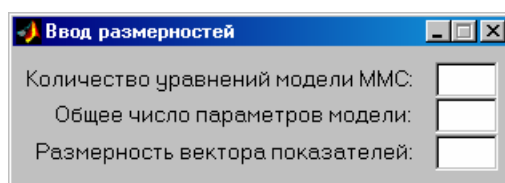


Рис. 3. Задание параметров математической модели.

Задание математической модели ММС позволяет полностью описать исходную систему уравнений. Вначале предлагается заполнить форму, представленную на рис. 3, в которой необходимо задать размерности векторов модели, параметров и показателей. Затем, исходя из введенных данных, последовательно загружаются формы ввода математической модели ММС:

- 1) окно задания уравнений с необходимыми условиями и возможностью ввода дополнительных констант, входящих в модель;
- 2) окно ввода данных, относящихся к параметризованному управлению: разделение вектора параметров по коалициям, начальные значения параметров, ограничения на параметры;
- 3) окно задания математического описания вектора показателей.

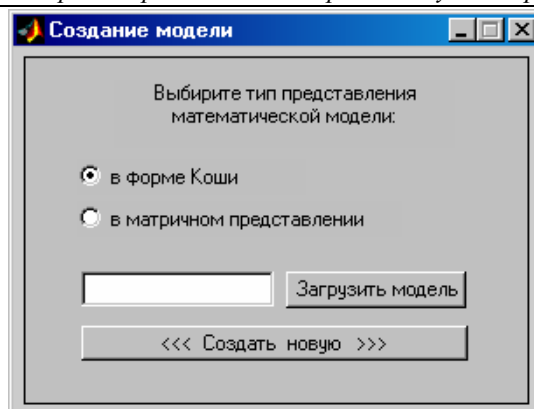


Рис. 4. Окно ввода типа представления модели.

Далее в последовательно раскрывающихся окнах предусматривается ввод необходимых выражений для указанных параметров математической модели. Предусмотрена также возможность задания математической модели ММС как в виде нормальной формы Коши, так и в матричном виде

$$\dot{X} = AX + Bu + C.$$

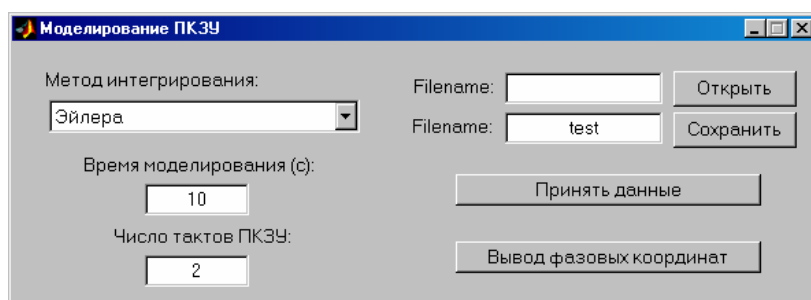
При этом предлагается вводить матрицы A, B, C напрямую в соответствующих формах в зависимости от задаваемой размерности векторов состояния и управления.

Рис. 5. Пример задания математической модели ММС.

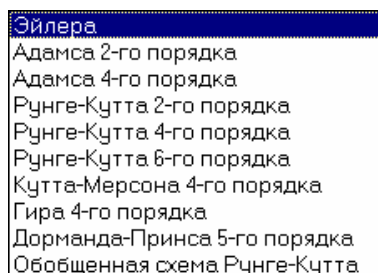
Для наиболее часто встречающихся задач с наличием двух коалиций в процессе конфликтного взаимодействия разработан интерфейс задания математической модели в одном интегрированном окне, которое представлено на рис. 5. Здесь, помимо описанных выше, предлагается также задание значений дополнительных постоянных параметров, входящих в описание математической модели либо в функционалы качества. При нажатии кнопки «IF» предусмотрена возможность ввода дополнительных условий на параметры для каждого из уравнений и показателей системы. Наличие единого интерфейса в данном случае позволяет осуществлять как сохранение модели в отдельном файле, так и загрузку из файла ранее введенной модели, причем все данные будут внесены в соответствующие ячейки формы. При нажатии кнопки «Принять данные» окно будет закрыто, при этом необходимо перезапустить главное окно системы для того, чтобы файл, содержащий введенные данные, был доступен для дальнейших вычислений в ПС.

Диалоговое окно «Моделирование» (рис. 6, а) предлагает перейти к форме, в которой необходимо задать следующие данные:

- метод интегрирования (один из 10, представляемых в раскрываемом списке — см. рис. 6, б);
- время моделирования ММС;
- число тактов программно-корректируемого закона управления;
- возможность загрузки данных из файла для ранее созданной модели ММС, а также сохранения введенных данных для текущей модели (необходимо ввести имя файла в поле «Filename»);
- графический вывод ранее полученных фазовых координат (переменных состояния) системы.



а



б

Рис. 6. Окно «Моделирование ММС» (а) и выбор метода интегрирования (б).

С помощью модуля моделирования возможно построение фазовых координат системы в зависимости от времени моделирования и числа тактов ПКЗУ, а также графическое отображение полученного в ходе оптимизации закона управления ММС.

Отдельно следует выделить моделирование программно-корректируемого закона управления (окно представлено на рис. 7), когда на отдельном программном такте ПКЗУ происходит вызов сначала модуля оптимизации с расчетом оптимального управления такта, затем осуществляется моделирование ММС с учетом полученного решения, после чего конечные значения переменных, полученные в результате моделирования к концу текущего такта, передаются как начальные условия для следующего такта ПКЗУ. Данная процедура продолжается до тех пор, пока не будет полностью сформировано параметризованное программное управление на всем интервале времени, на котором рассматривается система.

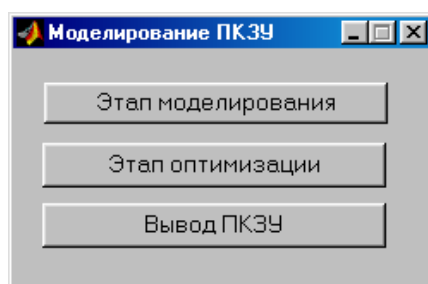


Рис. 7. Окно моделирования ПКЗУ.

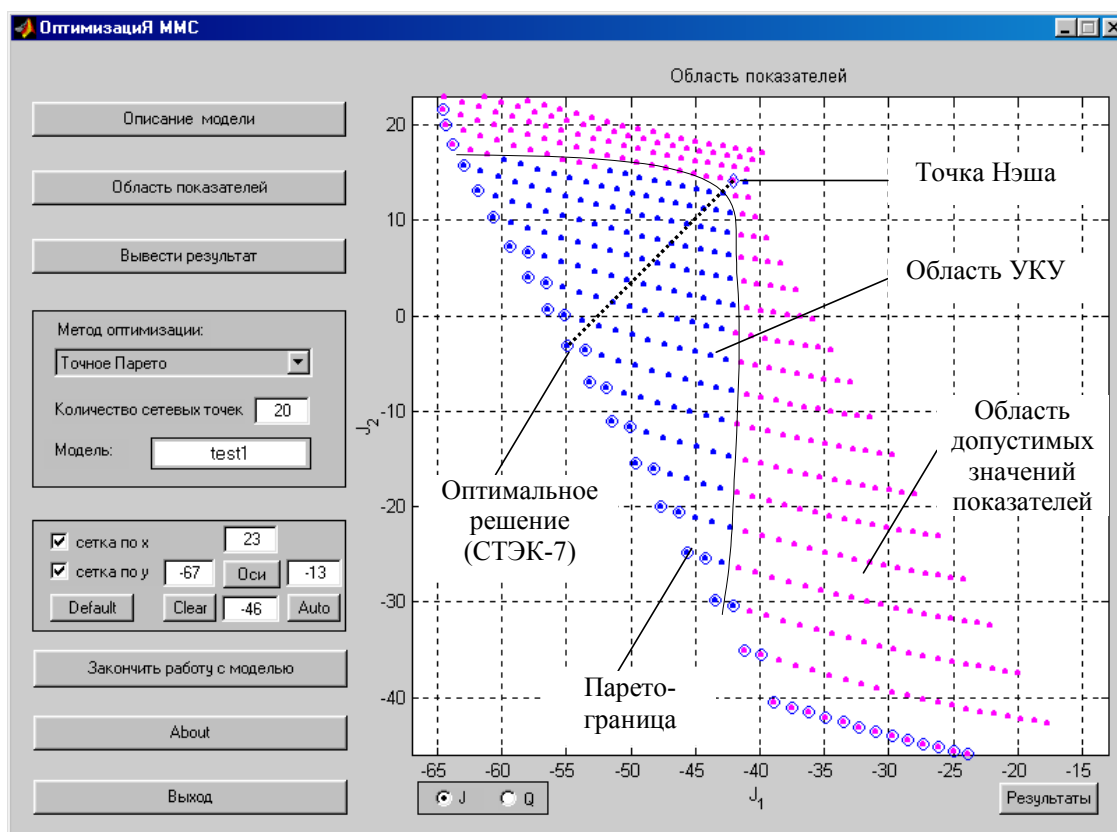
Вывод результатов моделирования подразумевает построение всех необходимых графиков (ПКЗУ, вектор состояния), вывод как на экран, так и в отдельные файлы полученного оптимального решения задачи и промежуточных результатов оптимизации и моделирования для всех используемых методов, которые применялись для решения поставленной задачи оптимизации ММС.

С целью упрощения общей многооконной структуры интерфейса ПС «МОМДИС» разработано несколько модификаций ПС «МОМДИС» с однотипным интерфейсом. Ниже приводится вариант для расчета двух- и трехкоалиционных задач (размерность вектора показателей $n \leq 3$, размерность вектора показателей каждой из сторон $n \geq 2$), который позволяет эффективно решать наиболее часто встречающиеся задачи оптимизации ММС. Для данной модификации полностью проработан интерфейс, позволяющий пользователю задавать математическую модель ММС, наглядно получать результаты оптимизации, управляя выводом как числовых данных оптимизации, так и их визуализацией в процессе расчетов. Табличные данные позволяют легко оценить качество оптимизации различными методами.

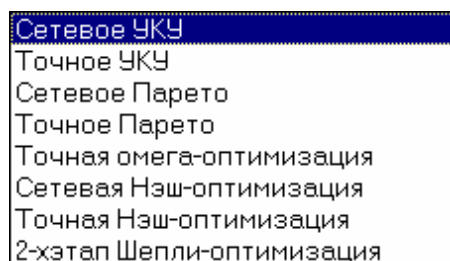
Для задания более сложных моделей, требующих подробного задания математической модели, предусмотрен последовательный диалоговый

многооконный режим общения с пользователем, где данные оптимизации представляются только в табличной форме без применения процедур визуализации, основные окна которого были приведены выше. Для моделей ММС с размерностью вектора показателей больше трех при необходимости могут быть графически построены проекции областей показателей и параметров в окрестности оптимального решения.

На рис. 8, а представлено главное окно модуля оптимизации, включающее графическое окно, которое отображает результаты оптимизации; кнопки, необходимые для ввода и коррекции математической модели; выбор метода оптимизации ММС; блок управления графическим полем.



а



б

Рис. 8. Главное окно модуля оптимизации программной системы «МОМДИС» с построенной областью значений показателей и указанием Нэш-, УКУ-, Парето-решений полученного оптимального решения задачи (СТЭК-7) с описанием на рис. 5 (а) раскрывающийся список при выборе метода оптимизации ММС (б).

Окно модуля оптимизации ММС содержит следующие управляющие элементы:

1. «Описание модели» (рис. 8, а): задание размерностей вектора параметров и вектора показателей; векторов нижних и верхних ограничений на параметры; ввод математической модели ММС в виде разностных уравнений и начальных значений переменных состояния; задание дополнительных параметров, используемых при задании и расчете модели ММС; а также задание функционалов качества, необходимых для формирования области показателей и получения на ней оптимального решения задачи. Для загрузки параметров с диска в систему и наоборот используется окно диспетчера файлов: ввод данных в систему («Открыть») и загрузка ранее заданной модели ММС («Загрузить»). После загрузки модели переход к окнам моделирования и оптимизации осуществляется с помощью окна верхнего уровня.
2. «Область показателей» — кнопка расчета области показателей, которая выводится сразу по окончании вычислений в графическом поле с тем же названием. Переключатель «J»–«Q» позволяет осуществлять визуализацию либо области функционалов (J), либо области параметров (Q) при размерности вектора показателей $n \leq 3$, получая либо двухмерное, либо трехмерное изображение областей при использовании заданной ортогональной сети.
3. Меню «Метод оптимизации» — позволяет выбрать один из восьми (на данном этапе реализации алгоритмов) методов оптимизации ММС (рис. 8, б). После выбора метода нажатием кнопки «Вывести результат» происходит расчет оптимальных значений показателей и параметров и одновременный вывод ее в графическом окне, используя конкретное цветовое обозначение для данного типа точек. Набор значений по каждому из параметров в пределах такта конфликта определяется путем задания необходимого количества сетевых точек на области определения параметра.
4. «Результаты» — кнопка, выводящая отдельное окно с численными пошаговыми результатами работы для выбранной процедуры оптимизации, а также полная информация о количестве найденных оптимальных точек, о количестве фактических точек и времени счета по текущему методу.
5. Предусмотрена возможность управления графическим выводом: задание масштаба по обеим координатам, вывод равномерной сетки, автоматическое масштабирование области в зависимости от максимальных значений по координатам.

Параметризация управления осуществляется на этапе составления и ввода исходной математической модели, описывающей поведение ММС, где учтено необходимое число параметров, аппроксимирующих функцию управления, и определены границы их изменения путем задания мини-

мального и максимального пороговых значений для каждого параметра. Может быть предусмотрен ввод числа параметров параметризованного управления для каждой из коалиций, по умолчанию же полагается, что общее число параметров коалиций равно количеству, вводимому в поле «Размерность вектора q параметров», распределенному равномерно на все коалиции (например, для числа коалиций $n = 2$ при вводе размерности $n_q = 4$ предполагается по умолчанию, что число параметров для каждой коалиции равно $n_q / n = 2$). При необходимости использования только части из выбранного числа параметров для данной коалиции необходимо задать интервал его изменения $[0, 0]$, и, таким образом, в циклах оптимизации он участвовать не будет. На отдельном такте ПКЗУ необходимо, чтобы размерность вектора параметров являлась четным числом. Все используемые на этапе оптимизации параметры должны быть использованы в записи математической модели ММС на этапе ее составления с возможным введением дополнительных условий, накладываемых на параметры оптимизации либо на переменные состояния.

Результаты расчета в числовом виде можно просмотреть в отдельном окне ПС (рис. 9), которое выводится путем нажатия кнопки «Результаты», расположенной в правом нижнем углу окна оптимизации.

The screenshot shows a window titled 'Результаты' (Results). It contains a section for optimization method settings and a 'СТАТИСТИКА' (Statistics) table.

Метод оптимизации: СТЭК 7. Кнопка: Вывести.

Размерность вектора параметров: 2

Размерность вектора функционала: 2

СТАТИСТИКА

Название метода	Кол-во сетевых точек	Кол-во оптимальных точек	Время счета
Сетевое УКУ	400	160	3.575
Сетевое Парето	400	48	0.731
Нэш оптимизация (сеть)	400	1	0.02
Нэш оптимизация	400	1	0.631
Вектор Шелли	400	1	0.201

Nº	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	J1	J2	J3
1	0.65	0							-55.2	-2.29	
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											

Рис. 9. Окно результатов оптимизации ММС по выбранному методу.

В данном окне предусмотрен вывод следующих результатов:

- используемая в задаче размерность векторов параметров и показателей;
- выбор метода оптимизации, по которому выводить результаты;
- вывод результатов при нажатии кнопки «Вывести»;
- «№» показывает номер точки в массиве данных по текущему методу; если точек больше, чем количество строк в матрице вывода, активными становятся кнопки «<<<<» и «>>>>», с помощью которых можно пролистывать результаты.
- «q1»–«q8» — параметры модели для каждой из точек «№»;
- «J1»–«J3» — показатели модели для каждой из точек «№»;
- вывод количества сетевых точек, числа оптимальных точек по каждому методу, а также времени счета для всех используемых методов (в секундах).

Далее, как было рассмотрено ранее, можно перейти к полному моделированию ММС с выводом ПКЗУ и фазовых координат состояния.

5. Практическое применение ПС «МОМДИС»

Применение разработанной ПС «МОМДИС» иллюстрируется решением ряда технических задач в следующих направлениях:

- 1) задачи в условиях исходной структурной несогласованности на примере мехатронной робототехнической системы;
- 2) задачи в условиях конфликтной ситуации: конфликтная ситуация локальных подсистем взаимодействующих объектов (например, задача конфликта с участием взаимодействующих группировок ЛА на верхнем уровне иерархии ММС, а на среднем уровне — задача коалиционного перехвата цели);
- 3) задачи в условиях неопределенности на примере системы управления торможением автомобиля в условиях неопределенных свойств поверхности торможения).

Ниже будут приведены краткие характеристики каждой из приведенных задач, более подробный анализ которых дан в [2, 3, 7, 9, 11, 12].

В рамках экономических задач микроэкономики разработанные методы применяются для исследования конкурентоспособности предприятий на товарном и финансовом рынке [4].

В рамках биотехнических приложений рассмотрены вопросы стабильно-эффективного функционирования системы естественной технологии организма (СЕТО) на основе предложенной модели обобщенного гомеостаза (самосохранения организма) в задачах геронтологии, токсикологии и др. [2, 5].

Для решения отдельных классов задач на основе ПС «МОМДИС» разработаны специализированные оболочки.

5.1. Алгоритм конфликтно-оптимального управления ММС при взаимодействии локальных систем с участием группировки воздушного базирования

Рассматривается следующая постановка задачи. Схема конфликта имеет вид (рис. 10).

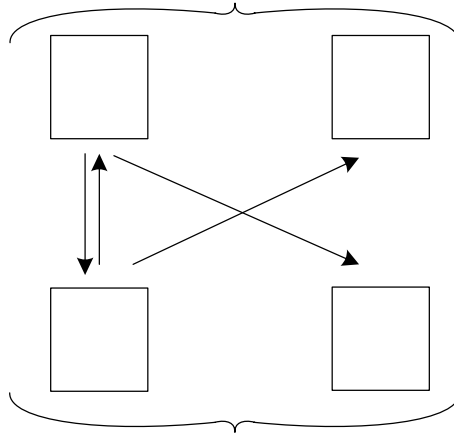


Рис. 10. Схема конфликтной ситуации.

Каждая сторона конфликта имеет в своем составе по две группы объектов: активные, имеющие определенное количество ресурсов, подлежащих распределению по эффективности взаимодействия с партнером, и пассивные, учет которых должен вести партнер при распределении своих ресурсов относительно противоположной стороны.

Центральным моментом решения поставленной задачи является задача оптимального управления ресурсами каждой коалиции и их распределения на основе прогноза динамики конфликта (ПДК) на отдельном такте конфликта [3].

Потактовая реализация математической модели системы базируется на уравнениях динамики средних. При этом характеристикой состояния ММС становится средняя численность групп объектов ($x_i > 0, i = \overline{1,4}$), которая задается как $x_i = N_i, i = \overline{1,4}$ в виде начальных условий задачи. Дифференциальные уравнения модели конфликтной ситуации могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\bar{P}_{31}(t) \cdot v_{31} \cdot k_1 \cdot x_3(t); \\ \dot{x}_2(t) = -\bar{P}_{32}(t) \cdot (1 - v_{31}) \cdot k_1 \cdot x_3(t); \\ \dot{x}_3(t) = -\bar{P}_{13}(t) \cdot v_{13} \cdot k_2 \cdot x_1(t); \\ \dot{x}_4(t) = -\bar{P}_{14}(t) \cdot (1 - v_{13}) \cdot k_2 \cdot x_1(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $x_i(t)$ — текущая численность объектов в i -й группе; $\bar{P}_{ij}(t)$ — коэффициенты, характеризующие эффективность взаимодействия в процессе конфликта для объектов i -го типа с объектами j -го типа; v_{ij} — доля активных объектов i -го типа, выделенных для взаимодействия с активными объектами j -го типа; $(1 - v_{ij})$ — доля активных объектов i -го типа, выделенных для взаимодействия с пассивными объектами j -го типа; k_i — характеризуют особенности имеющихся активных средств при взаимодействии с партнером. Система (2) при реализации на рамках ПС «МОМДИС» может быть приведена к потактовому алгоритму с возможностью рассмотрения определенного числа тактов взаимодействия.

В качестве терминальной компоненты показателя потерь (J) выберем показатель, имеющий смысл суммарного перевеса партнера по активным и пассивным средствам с некоторыми весовыми коэффициентами L_{11} , L_{12} и L_{21} , L_{22} , которые характеризуют прогнозируемую тактику действий каждой стороны конфликта на момент окончания взаимодействия:

$$J_A = L_{11} \cdot [x_3^2(T) - x_1^2(T)] + L_{12} \cdot [x_4^2(T) - x_2^2(T)], \quad J_A \rightarrow \min;$$

$$J_B = L_{21} \cdot [x_1^2(T) - x_3^2(T)] + L_{22} \cdot [x_2^2(T) - x_4^2(T)], \quad J_B \rightarrow \min.$$

В [3] рассмотрены различного рода показатели, которые могут быть использованы либо вместо предложенных выше, либо в дополнение к ним (например, дополнительный учет интегральной составляющей).

Алгоритмы прогноза динамики конфликта представляют собой алгоритмы стабильно-эффективных компромиссов на основе Нэш–Парето–УКУ–Шепли-комбинаций, входящие в структуру ПС «МОМДИС».

Начальные численности и эффективности

Активные средства ЛС 1:	<input type="text" value="12"/>	p_{13_0}	<input type="text" value="0.5"/>
Пассивные средства ЛС 1:	<input type="text" value="12"/>	p_{14_0}	<input type="text" value="0.5"/>
Активные средства ЛС 2:	<input type="text" value="16"/>	p_{31_0}	<input type="text" value="0.5"/>
Пассивные средства ЛС 2:	<input type="text" value="6"/>	p_{32_0}	<input type="text" value="0.5"/>

Тактические приоритеты коалиций

L_{11}	<input type="text" value="0.3"/>	L_{12}	<input type="text" value="0.7"/>	L_{13}	<input type="text" value="0"/>
L_{21}	<input type="text" value="0.7"/>	L_{22}	<input type="text" value="0.3"/>	L_{23}	<input type="text" value="0"/>

Конфигурация ЛС 1

Конфигурация ЛС 2

Рис. 11. Реализация оболочки в среде MATLAB.

Реализация оболочки в среде *MATLAB* представлена на рис. 11, надстройка которой над ПС «МОМДИС» позволяет более эффективно проектировать и исследовать влияние начальных данных на эффективность решения поставленной задачи.

Результаты расчета представляются как в графической форме (нормированная область значений показателей с указанием получаемых СТЭК в процессе оптимизации, рис. 12), так и в форме таблицы (рис. 13), которая разработана для удобства вывода результатов вычислений. На форму вынесены исходные данные задачи и те значения параметров и функционалов, которые были получены при оптимизации ММС, в частности данные по точке Нэша и УКУ–Шепли.

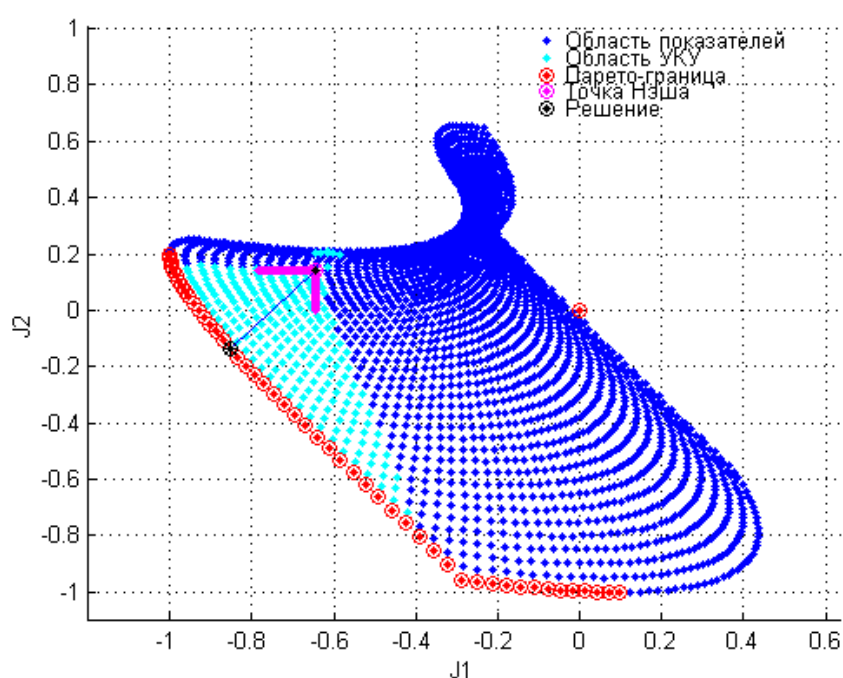


Рис. 12. Графическое отображение результатов оптимизации.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ									
НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ									
p13_0	p14_0	p31_0	p32_0	L11	L12	L13	L21	L22	L23
0.5	0.5	0.5	0.5	0.3	0.7	0	0.7	0.3	0
РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ									
	X1	X2	X3	X4	V1	V2	Ja	Jb	Ja+Jb
Начальные	12	12	16	6					
Нэш	4	10	4	4	0.7	0.78	-55.265	19.612	-35.653
УКУ-Шепли	1	12	8	1	0.4	1	-73.355	-18.87	-92.225

Рис. 13. Табличная форма представления расчетных данных.

Окна, приведенные на рис. 12, 13, выводятся путем нажатия кнопки «Просмотр результатов» на форме (рис. 11). Первая кнопка «Произвести расчет» запускает процесс оптимизации с начальными данными, заданными в полях формы. Модель может быть дополнена новыми параметрами, влияние которых необходимо учитывать в зависимости от вариантов конфигурации группировок ЛА.

Сама система уравнений может задаваться как в отдельном файле вручную, либо автоматически через ПС «МОМДИС». Необходимые методы оптимизации вызываются напрямую из математической подсистемы ПС «МОМДИС». В программе используется адаптивный алгоритм выбора шага ортогональной равномерной сети в зависимости от численностей каждой из локальных групп. При этом расчет для отдельного такта происходит в режиме реального времени.

Реализация данной программной системы проведена для конечной последовательности как независимых, так и взаимосвязанных тактов конфликта. При этом возможно применение дополнительных функционалов качества для межтактовой оптимизации в ходе конфликта. Проведен достаточно полный анализ эффективности двухтактного взаимодействия с получением результатов по широкому набору входных начальных данных модели [12]. Реализован метод управления ЛА на трех и более тактах конфликта с применением алгоритмов распределения ресурсов.

5.2. Оптимизация коалиционного перехвата противодействующего летательного аппарата (ЛА) на основе векторного Нэш-равновесия.

На основе ПС «МОМДИС» в среде *MATLAB* реализована программная система «Оптимизация коалиционного перехвата противодействующего ЛА», предназначенная для расчета и построения управлений и траекторий летательных аппаратов (два ЛА, представляющих собой коалицию, и цель) и имеющая модульную структуру. При работе используются функции, реализующие сетевые методы, формирующие этап начальных приближений для решения задачи, процедуры векторной оптимизации, Ω -оптимизации и Парето-оптимизации, а также алгоритм поиска стабильно-эффективного компромисса СТЭК-3, входящие в структуру ПС «МОМДИС». При работе для решения задачи квадратичного программирования используются средства *MATLAB* из состава *Optimization Toolbox*.

В задаче модель конфликтной ситуации представлена в виде дифференциальной игры в нормальной форме, когда выбор стратегий связан с выбором управлений, которые однозначно определяют исход в виде значения вектора показателей игры, характеризующего целевые свойства многообъектной многокритериальной системы. Движение центров масс ЛА описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной земной системе координат $O_d X_d Y_d Z_d$:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{g}{V_i} (n_{Yi} - \cos(\theta_i)) \\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{g \cdot n_z}{V_i \cdot \cos(\theta_i)} \\ \frac{dX_{\text{Ди}}}{dt} = V_i \cdot \cos(\theta_i) \cdot \cos(\psi_i), \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{dY_{\text{Ди}}}{dt} = V_i \cdot \sin(\theta_i) \\ \frac{dZ_{\text{Ди}}}{dt} = -V_i \cdot \cos(\theta_i) \cdot \sin(\psi_i) \end{cases}$$

где θ_i — угол наклона траектории полета ЛА; ψ_i — угол поворота траектории; V_i — скорость ЛА, принимаем постоянной на такте решения задачи; $[X_{\text{Ди}}, Y_{\text{Ди}}, Z_{\text{Ди}}]$ — координаты центров масс ЛА.

В качестве вектора управления $u_i, (i = P, E)$ принимается вектор нормальной перегрузки \vec{n}_i в виде его проекций на вертикальную плоскость

$$u_i = [n_{Yi}, n_{Zi}]^T,$$

где $|n_{Yi}| \leq n_{Yi}^m, |n_{Zi}| \leq n_{Zi}^m$.

ММС представляет собой две коалиции, векторный функционал которых не поддается скаляризации (см. рис. 14). Это связано, например, с тем, что тактические приемы наведения коалиции P не только неизвестны заранее цели E , но и могут меняться во время взаимодействия.

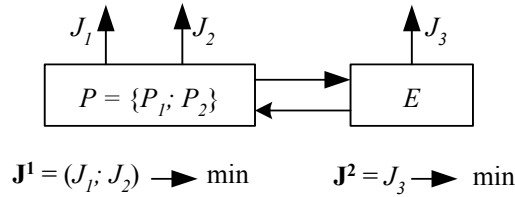


Рис. 14. Векторный показатель ММС

Вектор показателей системы имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \rho_1^2 + \lambda_1 \int_0^T (n_{Z1}^2 + n_{Y1}^2) dt \\ \rho_2^2 + \lambda_2 \int_0^T (n_{Z2}^2 + n_{Y2}^2) dt \\ \rho_K^2 + \lambda_3 \int_0^T (n_{Z3}^2 + n_{Y3}^2) dt \end{bmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_K — соответственно расстояния между первым ЛА и целью, вторым ЛА и целью и между целью и центром коалиции ЛА; T — время противодействия коалиций, время перехвата; $\lambda_i, i = \overline{1,3}$ — коэффициенты, определяющие роль ЛА в коалиции.

На рис. 15 изображено главное окно программы.

Оптимизация коалиционного перехвата противобойствующего ЛА

☐ Использовать данные из файла Догонный курс 1
☒ Ввести новые данные

Конфигурация звена ИП:

☒ Жесткая
☐ Управляемое изменение конфигурации в процессе перехвата

ИП1	ИП2	Цель	
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	Угол наклона траектории полета ЛА
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	Угол поворота траектории полета ЛА
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="4000"/>	X \
<input type="text" value="3200"/>	<input type="text" value="3200"/>	<input type="text" value="2000"/>	Y > Координаты ЛА (Y - высота)
<input type="text" value="-50"/>	<input type="text" value="50"/>	<input type="text" value="0"/>	Z /
<input type="text" value="600"/>	<input type="text" value="600"/>	<input type="text" value="300"/>	Скорость ЛА
<input type="text" value="33"/>	<input type="text" value="21"/>	<input type="text" value="33"/>	<input type="text" value="21"/>
<input type="text" value="21"/>	<input type="text" value="33"/>	<input type="text" value="21"/>	<input type="text" value="21"/>
Густота сети параметров управления			

☒ Строить отображения областей достижимости ЛА
☒ Строить графики оптимальных траекторий и управлений ЛА
☐ Строить отображение области показателей

Имя текстового файла, который будет содержать результаты

Рис. 15. Главное окно программы.

В верхнем левом углу приложения помещен переключатель, позволяющий установить способ ввода исходных данных (исходные конфигурации летательных аппаратов, а также их скорости): положение «Использовать данные из файла» автоматически выводит исходные данные конфигураций ЛА для вариантов заданий, при этом поля редактирования становятся недоступными для ввода данных вручную; положение «Ввести новые данные» открывает доступ к редактированию исходных данных, при этом в поля редактирования можно вручную внести новые данные. Ниже этого переключателя расположен другой переключатель, позволяющий установить конфигурацию звена ЛА. От его состояния зависит метод выбора начальных приближений для задачи поиска векторного равновесия. При положении «Жесткая» начальное приближение для обоих ЛА оценивается по области достижимости коалиции. При положении «Управляемое измене-

ние конфигурации в процессе перехвата» начальное приближение выбирается по областям достижимости каждого из ЛА в отдельности. Ниже областей редактирования исходных данных конфигурации ЛА помещены области редактирования для ввода густоты сети по параметрам управления ЛА: по величине вектора нормальной перегрузки и по углу его приложения относительно вертикальной оси соответственно для каждого объекта. Ниже данных областей редактирования расположены управляющие флаги, позволяющие настроить вывод полученных результатов. Ниже флагов расположено поле для ввода имени файлов (текстового и файла формата .mat), куда будут записаны результаты проведенных расчетов.

Текстовый файл содержит начальные приближения для решения задачи оптимизации, отчет о решении задачи квадратичной минимизации функции, характеризующей степень несовместности необходимых условий векторного равновесия, по параметрам управления, а также полученные в результате решения задачи параметры управления, соответствующие равновесному состоянию. Файл формата .mat содержит начальные данные, конечные данные, оптимальные параметры управления и интервалы времени. Нажатие кнопки «Подтвердить ввод» отправляет введенные исходные данные на исполнение в основное тело программы. Результаты представляются в форме графиков управлений, траекторий и построения областей достижимости ЛА в системе земных координат.

При помощи данной программной системы получены решения для задачи коалиционного перехвата противодействующей цели в случае дискриминации игрока-цели и в случае равноправных коалиций на основе минимаксного подхода. Проведен анализ эффективности коалиционного взаимодействия на основе модифицированных СТЭК в зависимости от начального положения ЛА при различном характере противодействия коалиций. Более подробно познакомиться с этими задачами можно в [3, 12].

5.3. Оптимизация управления роботом с учетом мехатронной структуры в условиях неопределенности на основе стабильно-эффективных компромиссов

В настоящее время вопросы проектирования, модификации и управления в технических системах в соответствии с основными результатами относительно нового научно-технического направления — мехатроники — базируются на универсальной структуре мехатронной системы в виде трех, в общем случае, равнозначных сильно связанных подсистем: механической, электротехнической и компьютерной подсистемой управления. Простейшая структура такой системы дана на рис. 16.

К подобным системам могут быть отнесены: летательные аппараты (ЛА), если система управления ЛА выбирается не только с учетом законов управления и вычислительных средств их реализации, но и с учетом изме-

няемой механики полета ЛА; робототехнические системы; собственно следующие приводы, а также множество других систем.



Рис. 16. Простейшая структура мехатронной системы.

В процессе проектирования и модификации управляемых мехатронных систем формулируются векторные требования к каждой подсистеме в виде показателей эффективности и потерь, типы и допустимые множества изменяемых параметров и управляющих сил. Оптимизация мехатронных систем как ММС на основе стабильно-эффективных игровых решений позволяет одновременно учесть требования к каждой из подсистем в условиях исходной несогласованности и к системе в целом и найти компромиссную комбинацию параметров. При этом работа системы оценивается показателями качества, которые позволят оптимизировать не только каждую подсистему, но всю мехатронную систему в целом.

Математическая модель робота подробно представлена в [9]. Структурная схема имеет следующий вид (рис. 17).

На структурной схеме приняты следующие обозначения: $K_{rp}, K_{ri}, K_{rd}, T_{rd}$ — параметры ПИД-контроллера; K_m, T_m — параметры тиристорного усилителя; f_1 — нелинейная характеристика типа «насыщение» тиристорного усилителя; $L_\gamma, R_\gamma, K_\gamma$ — конструктивные параметры электродвигателя постоянного тока; K_e — коэффициент противо-ЭДС; f_2 — нелинейная характеристика типа «сухое трение», учитывающая приведенный момент сухого трения; $I_\Sigma = I_{ov} + I_{np}$ — суммарный момент инерции на валу электродвигателя (собственный и приведенный), относительно которого имеет место неопределенность; K_r — передаточное число редуктора; $K_{эм}, T_{эм}, \xi_{эм}$ — параметры эталонной модели (ЭМ); y — угловое перемещение манипулятора промышленного робота; ω — угловая скорость вращения вала электродвигателя; M — момент на валу электродвигателя; K_m — коэффициент момента; M_ω — приведенный момент сухого трения; u_{T_2} — выходной сигнал тиристорного преобразователя.

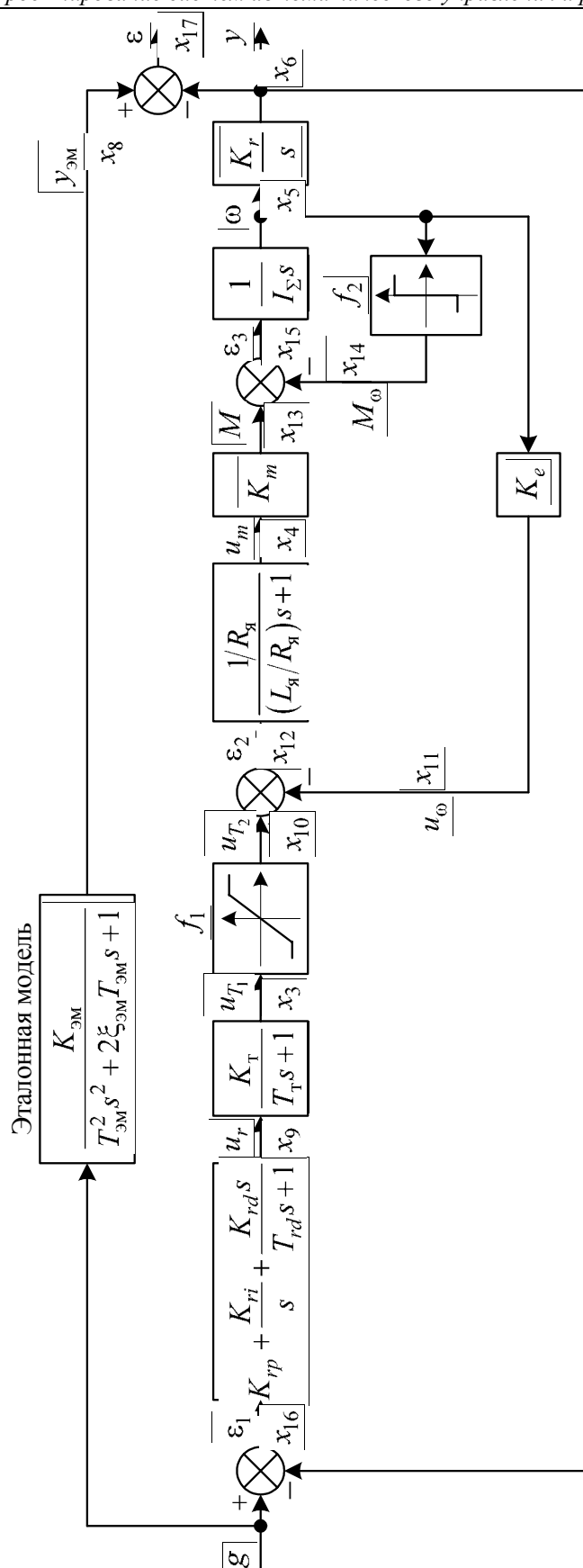


Рис. 17. Структурная схема адаптивной системы управления приводом поворота промышленного робота «Универсал-5».

Для оценки поведения объекта управления в систему включена эталонная модель (ЭМ), динамика которой приближенно может быть описана колебательным звеном. Сигнал рассогласования $\varepsilon(t) = y(t) - y_{\text{эм}}(t)$ между выходом объекта и эталонной моделью анализируется по значению показателя качества J_1 . Представим математическую модель системы управления в нормальной форме. Для этого введем следующие переменные:

$$\dot{x}_1 = x_2 + Q_1 \varepsilon_1; \quad \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{T_{rd}} + Q_2 \varepsilon_1,$$

где

$$Q_0 = \frac{K_{rp} T_{rd} + K_{rd}}{T_{rd}}; \quad Q_1 = \frac{K_{rp} + K_{ri} T_{rd} - Q_0}{T_{rd}}; \quad Q_2 = \frac{K_{ri} - Q_1}{T_{rd}};$$

$$x_3 = u_{T_1}; \quad x_4 = u_m; \quad x_5 = \omega; \quad x_6 = y; \quad x_7 = \dot{x}_8; \quad x_8 = y_{\text{эм}}; \quad x_9 = u_r; \quad x_{10} = u_{T_2}; \\ x_{11} = u_\omega; \quad x_{12} = \varepsilon_2; \quad x_{13} = M; \quad x_{14} = M_\omega; \quad x_{15} = \varepsilon_3; \quad x_{16} = \varepsilon_1; \quad x_{17} = \varepsilon.$$

Тогда в качестве математического описания системы управления приводом поворота манипулятора промышленного робота можно принять систему динамико-алгебраических связей:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + Q_1 x_{16}; \quad \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_{rd}} x_2 + Q_2 x_{16}; \quad \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_m} x_3 + \frac{K_m}{T_m} x_9; \\ \dot{x}_4 &= -\frac{R_\gamma}{L_\gamma} x_4 + \frac{1}{L_\gamma} x_{12}, \quad \dot{x}_5 = \frac{1}{I_\Sigma} x_{15}, \quad \dot{x}_6 = K_r x_5, \\ \dot{x}_7 &= \frac{K_{\text{эм}} g}{T_{\text{эм}}^2} - \frac{2\xi_{\text{эм}} T_{\text{эм}}}{T_{\text{эм}}^2} x_7 - \frac{1}{T_{\text{эм}}^2} x_8; \quad \dot{x}_8 = x_7; \quad x_9 = x_1 + Q_0 x_{16}; \\ x_{10} &= f_1(x_3) = \begin{cases} x_3, & -a \leq x_3 \leq a; \\ a, & x_3 > a; \\ -a, & x_3 < -a; \end{cases} \quad x_{11} = K_e x_5; \quad x_{12} = x_{10} - x_{11}; \quad x_{13} = K_m x_4; \\ x_{14} &= M_\omega = \begin{cases} c, & x_5 \geq 0; \\ -c, & x_5 < 0; \end{cases} \quad x_{15} = x_{13} - x_{14}; \quad x_{16} = g - x_6; \quad x_{17} = x_6 - x_8. \end{aligned}$$

Для перехода от системы дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих физические процессы, которые протекают в мехатронной системе при отработке входного воздействия, к рекуррентным уравнениям, позволяющим использовать для изучения модели и нахождения оптимальных параметров контура управления методы стабильно-эффективных компромиссов (СТЭК) необходимо заменить производные в дифференциальных уравнениях на отношение конечных разностей к шагу. После подобной замены и упрощения исходной системы уравнений окончательно имеем систему из восьми разностных уравнений, которая вводится для моделирования в ПС «МОМДИС».

Показатель качества подсистемы управления робота выбирается в форме интегральной квадратической оценки

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min,$$

где $e(t) = x_8(t) - x_6(t)$ является сигналом рассогласования между выходной координатой робота и выходной координатой эталонной модели.

Показатель электромеханической подсистемы J_2 учитывает в первом слагаемом конфликтный характер взаимодействия системы управления робота и неопределенных параметров механической части, вытекающий из свойств гарантированного робастного качества, а во втором слагаемом — свойство отклонения степени конфликтности от антагонизма, что соответствует типичной ситуации в условиях неопределенности:

$$J_2 = -\alpha_1 \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon^2(t) dt + \alpha_2 \int_{t_0}^{t_k} (\varepsilon_2(t) - \varepsilon_2(t, J_{\Sigma} = 3,5J_{\partial\partial}))^2 dt \rightarrow \min.$$

В работе [9] получено робастное решение для параметров регулятора в более общей постановке на основе генетических алгоритмов, перцептронной модели нейросети и векторного минимакса. В данном примере неопределенность рассматривается как активный партнер, у которого антагонистический характер проявления дополняется типовыми вариантами бескоалиционного и бескоалиционного взаимодействия, и, следовательно, робастное качество дополняется на основе СТЭК менее жестким робастно-игровым качеством, учитывающим типовые варианты бескоалиционной и коалиционной степени конфликтности неопределенности.

Эффективность компьютерной системы оценивается интегральным показателем ошибки, который характеризует качество переходных процессов при обработке воздействия типа скачка на конечном интервале времени. Второй интегральный показатель учитывает нестабильность массово-инерционных характеристик электромеханической подсистемы робота в процессе эксплуатации, а также конфликтность параметров схемы управления, часть из которых отвечает за статическую точность, а часть — за динамическую, например свойство отклонения степени конфликтности от антагонизма, что соответствует типичной ситуации в условиях неопределенности.

Для оптимизации системы применена ПС «МОМДИС», в которой реализованы алгоритмы Нэш–Парето–УКУ–Шепли-оптимизации, а также их комбинации. В рамках полученной структуры из двух подсистем в виде электромеханической и алгоритмической частей применены указанные алгоритмы оптимизации, которые позволяют получить наиболее эффективные решения, уравнивающие эффективность каждой из подсистем, т. е. приводящие к компромиссу между показателями качества подсистем.

Ниже приведен пример исследования системы при следующих значениях параметров:

$$L_{\text{я}} = 0,05; R_{\text{я}} = 1; K_m = 3,8; K_r = 1; K_l = 0,3; T_m = 0,05; K_m = 4,1; \\ K_{\text{эм}} = 1; T_{\text{эм}} = 1; \xi_{\text{эм}} = 0,9; c = 0,1; a = 1; \alpha_1 = 0,2; \alpha_2 = 0,8.$$

Результат оптимизации графически представлен на рис. 18.

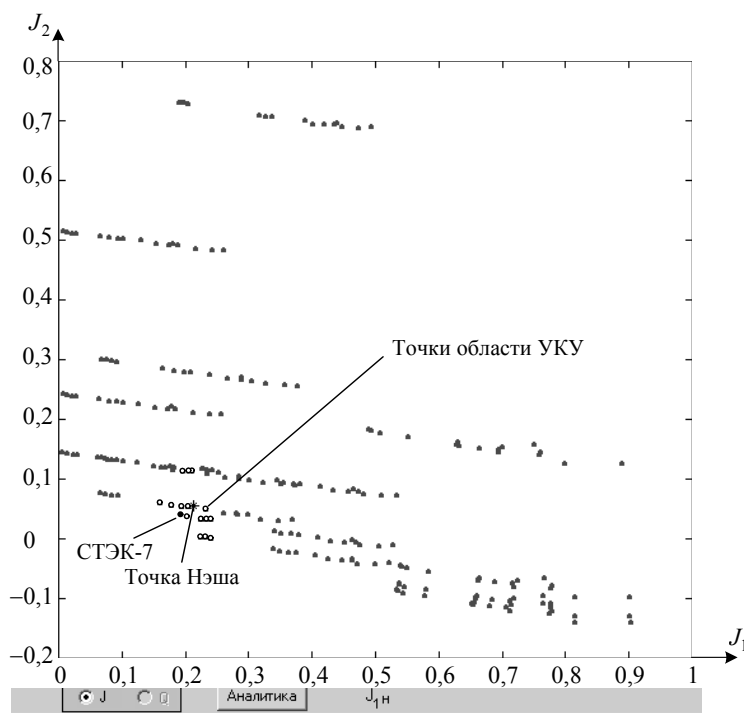


Рис. 18. Нормированная область значений показателей качества

Набор параметров ПИД-регулятора и J_{Σ} , соответствующих точке Нэша, имеет следующий вид:

$$K_{rp} = 0,59; K_{ri} = 0,008; K_{rd} = 0,473; T_{rd} = 0,06; J_{\Sigma} \cong 3,34$$

и точке СТЭК-7:

$$K_{rp} = 0,4; K_{ri} = 0,008; K_{rd} = 0,333; T_{rd} = 0,06; J_{\Sigma} \cong 2,5.$$

Работа ПИД-регулятора с полученными оптимальными параметрами была промоделирована в ПС MATLAB с использованием пакета Simulink [9]. Результаты анализа показывают, что системе свойственна некоторая степень колебательности, в частности при реакции на единичное ступенчатое воздействие (при некоторых значениях момента инерции) возникло перерегулирование, что недопустимо для промышленных роботов. Но при этом существует переходный процесс, который протекает с наименьшей степенью колебательности — этот процесс соответствует среднему значению момента инерции.

Таким образом, в результате оптимизации получены параметры ПИД-регулятора в системе управления роботом и момент инерции в электро-механической части на основе СТЭК в условиях антагонистической бескоалиционного и коалиционного учета проявления неопределенности момента инерции робота. Анализируется робастное и робастно-игровое качество системы, которые базируются не только на гарантированных решениях с максимальной степенью конфликтности со стороны неопределенности момента инерции робота, но и на меньшей степени конфликтности.

5.4. Модель конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения на этапе робастного регулирования

Рассматривается модель и алгоритм конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения. Исследование неопределенностей на основе игрового подхода позволяет получить характеристики среды — «активного партнера» (поверхности торможения), а также робастного регулятора антиблокировочной системы торможения, обеспечивающего робастно-игровое качество [8]. Базовыми для исследования являются методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений и компромиссов.

Робастный метод регулирования дополняется универсальным методом исследования неопределенности на основе игрового подхода, который позволяет обосновать характеристики среды (поверхности торможения), принятые на стадии робастного регулирования, как основные и расширить учет свойств неопределенности в форме неопределенности «активного партнера» и неопределенности цели. В [2] представлена впервые разработанная модель конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения и формулируется практически важный метод исследования полученной конфликтной ситуации и алгоритм робастно-игровой коррекции, повышающий робастное качество регулирования.

Рассматриваемая модель [2, 7] принадлежит классу линейных систем на пространстве состояний с параметрической матричной аффинной неопределенностью. Для детерминированных моделей систем с неопределенностями, в том числе и указанного вида, как правило, применяется подход с целью достижения гарантирующего робастного качества стабилизирующего регулятора в форме скалярного и векторного минимакса [6].

В качестве базовой выбирается система, описывающая процесс линеаризованного движения автомобиля (или автобуса) при малых угловых скоростях вращения его корпуса Ω_z .

Вводится столбец вектора состояния x в виде

$$x^T = (V_y, \Omega_z, \Omega_{11y}, \Omega_{12y}, \Omega_{21y}, \Omega_{22y}, P_{11x}, P_{12x}, P_{21x}, P_{22x}, P_{11y}, P_{12y}, P_{21y}, P_{22y}),$$

где V_y — скорость заноса автомобиля (автобуса); Ω_z — скорость вращения автомобиля вокруг вертикальной оси Oz ; Ω_{ijy} — скорость вращения i, j -го колеса ($i, j = 1, 2$) вокруг оси вращения колеса Oy ; P_{ijx} — контактная сила i, j -го колеса ($i, j = 1, 2$) (сила сопротивления поверхности) в направлении оси Ox автомобиля; P_{ijy} — контактная сила i, j -го колеса ($i, j = 1, 2$) (сила сопротивления поверхности) в направлении оси Oy .

Вводятся также управляющие силы автомобиля и поверхности в виде векторов параметров $q_A \in Q_A$ и $q_\Pi \in Q_\Pi$ соответственно.

Вектор параметров

$$q_A = (S_{11x}, S_{12x}, S_{21x}, S_{22x}),$$

где S_{ijx} — проскальзывание i, j -го колеса в направлении Ox , которое входит в выражение для моментов управления колесами (в данном случае торможения); $L_{ij} = k_{ij} \cdot S_{ijx}$, $i, j = 1, 2$. Коэффициенты k_{ij} — заданные коэффициенты матрицы регулятора, обеспечивающие оптимальность робастного регулирования по А. М. Ляпунову. Поэтому L_{ij} — заданная линейная функция управляющего параметра S_{ijx} .

Множество Q_A имеет вид $Q_A = \{S_{ijx} : 0 \leq S_{ijx} \leq 0,15, i, j = 1, 2\}$, где $S_{ijx} = 0,15$ — максимально допустимая величина проскальзывания колеса на робастном участке регулирования торможением автомобиля (автобуса).

В общем случае

$$S_{ijx} \cong \frac{V_{ijx}^A - \Omega_{ijy} R}{V_{ijx}^A},$$

где R — радиус колеса, $V_{ijx}^A = V_x$ — продольная скорость автомобиля. При $V_{ijx}^A = V_x = \text{const}$ (линейная модель) S_{ijx} пропорциональны скорости вращения колеса Ω_{ijy} .

Вектор «управляющих» параметров поверхности

$$q_\Pi = (v_{11x}, v_{12x}, v_{21x}, v_{22x}),$$

где v_{ijx} — коэффициент сцепления с поверхностью под i, j -м колесом (точнее, коэффициент кулонова трения скольжения в площадке контакта i, j -го колеса) в выражениях для контактной силы

$$P_{ijx} = -U_{ijx} S_{ijx}; \quad -U_{ijx} = -v_{ijx} \cdot N_{ij} \cdot k_0, \quad i, j = 1, 2.$$

Множество Q_Π имеет вид

$$Q_\Pi = \{v_{ijx} : 0,05 \leq v_{ijx} \leq 1, i, j = 1, 2\}.$$

Данные неравенства характеризуют допустимый разброс свойств поверхности торможения. В этих условиях из физических соображений следует определенная «рациональность поведения» поверхности в конфликтной ситуации в форме mix -состояния, что вызывает вращение автомобиля вокруг оси Oz и занос по оси Oy при неоптимальном торможении. Подобные наборы v_{ijx} могут быть использованы в качестве начальных приближений «управляющих» параметров поверхности в конфликтной ситуации.

Вполне вероятно, что среди «рациональных» свойств поверхности можно выделить малые, хотя и разные значения коэффициентов сцепления v_{ijx} , что также в общих условиях торможения может вызывать вращение автомобиля, занос и малое замедление, а также ряд других вариантов, которые могут быть выявлены в процессе исследования.

Из анализа взаимосвязи получены приближенные соотношения между v_{ijx} и v_{ijy} следующего вида:

$$\begin{cases} v_{ijx}^2 + v_{ijy}^2 = 1,2^2, & \text{если } v_{ijx} > 0,45; \\ v_{ijx}^2 + v_{ijy}^2 = 0,45^2, & \text{если } v_{ijx} < 0,45. \end{cases}$$

Окончательно [2] математическое описание динамики взаимодействия автомобиля и поверхности принимает вид

$$\dot{x} = C^{-1}Ax + C^{-1}Bq.$$

В общем случае при переходе в описании управляющих сил от управляющих параметров к программным управлениям и управлениям в обратных связях и их приближениям данное описание становится нелинейным по управляющим силам поверхности.

Очевидной в данном варианте конфликтной ситуации является коалиционная структура ММС, которая состоит из двух объектов-коалиций. Характер коалиции «объект–автомобиль» приобретает, если учесть его структурные свойства: четыре колеса и поддрессоренную массу автомобиля. Соответственно и поверхность торможения может быть описана коалицией сил сопротивления под каждым из четырех колес.

Векторный показатель формирует многокритериальное целевое качество робастного регулирования в условиях неопределенности, т. е. позволяет учесть некоторые технические требования при торможении автомобиля и типичные «целевые» свойства неопределенности среды. В рассматриваемом варианте конфликтной ситуации векторный показатель задан в виде трех показателей для каждого объекта:

$$J_A = (J_{A1}, J_{A2}, J_{A3}); \quad J_\Pi = (J_{\Pi1}, J_{\Pi2}, J_{\Pi3}).$$

Показатели автомобиля и критерии оптимизации имеют вид:

$$J_{A1} = \int_{t_0}^T (\dot{\Omega}_z - \dot{\Omega}_{z\text{дон}})^2 dt \rightarrow \min_{q_A}$$

— курсовая устойчивость автомобиля (точнее, допустимая курсовая неустойчивость на интервале времени (t_0, T)), где $\dot{\Omega}_{z\text{дон}}$ — допустимая величина углового ускорения; типичные значения начала и окончания робастного интервала управления АБС $t_0 = 0$ и $T = 0,15$ с соответственно;

$$J_{A2} = V_x(T_1) \rightarrow \min_{q_A}$$

— продольное замедление;

$$J_{A3} = \int_{t_0}^T V_y^2 dt \rightarrow \min_{q_A}$$

— минимальный занос.

Показатели поверхности и критерии оптимизации имеют вид

$$J_{\Pi1} = -J_{A1} \rightarrow \min_{q_\Pi}$$

— курсовая неустойчивость автомобиля;

$$J_{\Pi 2} = \int_{t_0}^T \sum_{i,j=1}^2 P_{ijy}^2 dt \rightarrow \min_{q_{\Pi}}$$

— минимизация сил сопротивления поверхности по оси Oy («способствование» поверхности вращению и заносу автомобиля);

$$J_{\Pi 3} = \int_{t_0}^T \left[\gamma_1 \sum_{i,j=1}^2 v_{ijy}^2 + \gamma_2 \sum_{i,j=1}^2 v_{ijx}^2 \right] dt \rightarrow \min_{q_{\Pi}}, \quad 0 \leq \gamma_i \leq 1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1$$

— минимальные энергетические свойства поверхности по кулонову трению скольжения (качество сцепления с поверхностью).

Таким образом, задана математическая модель конфликтной ситуации «автомобиль–поверхность торможения», которая в дополнение к разработанному робастному алгоритму в условиях неопределенности среды позволяет в исследовании учесть свойства неопределенности «активного партнера», присущие данной задаче, и элементы компенсации целевой неопределенности, вводя прагматические векторные показатели сторон.

Варианты степени конфликтности взаимодействия неопределенности с системой на основе бескоалиционных, коалиционных и кооперативных подходов формируются в виде стабильно-эффективных компромиссов. Рассматриваются способы построения СТЭК для скалярных показателей сторон на основе выбора наиболее эффективных равновесных решений в смысле близости к Парето-границе и точке дележа Шепли на области Парето–Нэш-компромиссов [1, 3, 10].

В качестве объекта торможения рассматривался автобус. В [2] проанализировано 24 варианта в различными начальными данными. Исследование эффективности конфликтного взаимодействия проведено в следующих направлениях: изменение весовых параметров α_i, β_i в показателях учитывает различную целевую настройку конфликтного взаимодействия; учет влияния начальной продольной скорости V_x ; учет начальных условий робастного участка регулирования (базовые варианты); учет качества робастного регулирования; вид стабильно-эффективного компромисса.

Ниже приведен пример базового варианта с ненулевыми начальными условиями по скорости вращения, заносу и силам.

Начальные данные:

$$\dot{\Omega}_{z_{don}} = 0,04 \text{ с}^{-2}, \quad \alpha_i = \beta_i = 0,33, \quad i = \overline{1,3}, \quad V_x(t_0) = 40 \text{ м/с}, \quad P_{ijx}(t_0) = 0, \\ \Omega_z(t_0) = 0,1 \text{ с}^{-1}, \quad V_y(t_0) = 0,4 \text{ м/с}, \quad \Omega_{ijy}(t_0) = 80 \text{ с}^{-1}.$$

Каждый оптимизационный эксперимент представляет собой достаточно сложную процедуру вычислений в рамках ПС «МОМДИС», состоящую из глобального сетевого анализа на допустимых множествах управляющих параметров и показателей на сети параметрических точек, где каждый из восьми управляющих параметров задается тремя значениями, и ком-

бинированной оптимизации на основе многоэтапных алгоритмов оптимизации по Парето, Нэшу, а также на основе «угроз и контругроз» с отбором УКУ в окрестности точки Шепли.

Результаты оптимизации имеют следующий вид:

- диапазоны изменения показателей
 $0,00042 \leq J_{A1} \leq 0,01638$; $39,55 \leq J_{A2} \leq 39,59$; $0,051 \leq J_{A3} \leq 0,065$;
 $-0,01638 \leq J_{\Pi1} \leq -0,00042$; $0,40 \cdot 10^7 \leq J_{\Pi2} \leq 1,75 \cdot 10^7$; $0,32 \leq J_{\Pi3} \leq 2,19$;
- оптимальные значения управляющих параметров:

СТЭК-1				
i, j	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
ν_{ijx}^r	0,58	0,23	0,64	0,3
s_{ijx}^r	0,03	0,12	0,04	0,10

СТЭК-7				
i, j	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
ν_{ijx}^{YKY}	0,96	0,46	0,07	0,05
s_{ijx}^{YKY}	0,12	0,11	0,04	0,09

- оптимальные значения показателей
 СТЭК-1: $\begin{cases} J_{Ai}^r : 0,00549; 39,569; 0,058; & \hat{J}_{Ai}^r : 0,32; 0,48; 0,55; \\ J_{\Pi i}^r : -0,00549; 1,05 \cdot 10^7; 1,285; & \hat{J}_{\Pi i}^r : 0,68; 0,48; 0,51; \end{cases}$
 СТЭК-7: $\begin{cases} J_{Ai}^{YKY} : 0,01209; 39,557; 0,055; & \hat{J}_{Ai}^{YKY} : 0,73; 0,16; 0,28; \\ J_{\Pi i}^{YKY} : -0,01209; 1,20 \cdot 10^7; 1,27; & \hat{J}_{\Pi i}^{YKY} : 0,27; 0,59; 0,51; \end{cases}$
- терминальные значения угла поворота $\Psi(T_1)$

$$\Psi(T_1) = \begin{cases} \text{СТЭК-1: } 8,9^\circ; \\ \text{СТЭК-7: } 9,2^\circ. \end{cases}$$

Нормированная область допустимых значений всех показателей приведена на рис. 19.

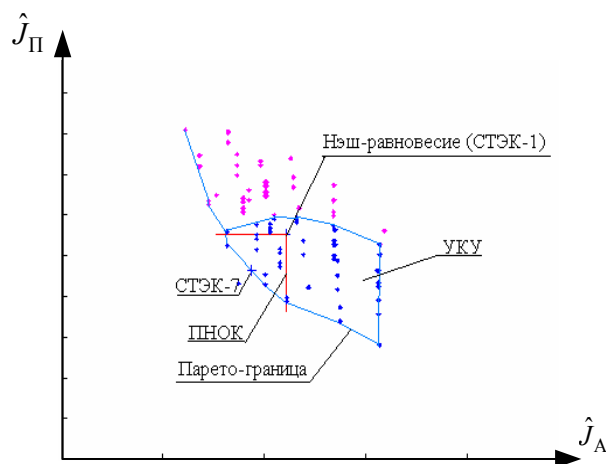


Рис. 19. Область допустимых значений показателей.

Анализ экспериментов показывает, что в точке СТЭК-1 (точке равновесия по Нэшу) имеет место бортовой микс между правым и левым бортом на поверхности торможения при реакции АБС в виде «креста» (наибольшее проскальзывание на малом сцеплении). Из-за ненулевых начальных условий по $\Omega_z = 0,1 \text{ c}^{-1}$ и заносу $V_y = 0,4 \text{ м/с}$ (1% от V_x), которые более «выгодны» поверхности торможения, бортовой микс «смягчен» по сравнению с базовым вариантом №1 с нулевыми начальными условиями (коэффициенты сцепления на обоих бортах уменьшились), что в свою очередь приводит к смягчению реакции АБС.

В данном варианте (при ненулевых условиях) оптимальное торможение в точке СТЭК-1 отличается по структуре от торможения в точке СТЭК-7. Если в СТЭК-1 имеет место «крест» — реакция АБС, то в точке СТЭК-7 величины проскальзывания колес S_{11x} и S_{12x} обеспечивают максимальное замедление, а совместно с колесом 22 обеспечивают определенную компенсацию заноса и вращения. По основному показателю курсовой устойчивости при потерях в замедлении и заносе более выгодным для автобуса является режим торможения (крест) в точке СТЭК-1.

Полный набор экспериментов позволяет сделать следующие выводы. Разработан метод анализа конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения на основе игровых подходов. Применение метода в практически ценной модели торможения автомобиля (автобуса) высокого порядка на этапе робастного регулирования АБС позволило получить следующие теоретико-прикладные результаты. Выявлены четыре вида конфликтно-оптимальных свойств поверхности в процессе торможения: бортовой и осевой микс, малое сцепление, комбинирование бортового и осевого микс и ряд оптимальных реакций тормозной АБС, среди которых наиболее типичны проскальзывание S_{ijx} , $i, j = 1, 2$ типа «крест» (малое проскальзывание при большом сцеплении и наоборот), «антикрест» с компенсацией.

Обоснованы результаты выбора свойств поверхности торможения в методах робастного регулирования. Оценено влияние качества робастно регулирования на конфликтно-оптимальное взаимодействие с поверхностью. Получены элементы комбинированного исследования взаимодействия автомобиля и поверхности торможения методом робастного регулирования и методом анализа конфликтно-оптимального взаимодействия, которые в целом охватывают свойства неопределенности поверхности и формируют метод робастного регулирования с робастно-игровой коррекцией.

Данный гибкий метод оценки робастно-игрового качества применяется для уточнения параметров семейства стабилизирующих регуляторов, а также для формирования компенсационных режимов, улучшающих условия стабилизируемости, которые составляют процедуру робастно-игровой коррекции робастного регулирования. Более подробно с моделью и результатами исследования можно познакомиться в [2, 7].

Литература

1. Вилкас Э. И. Оптимальность в играх и решениях.— М.: Наука, 1990.— 256 с.
2. Воронов Е. М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе разработки и модификации стабильно-эффективных игровых решений. Дисс. .. д-ра техн. наук.— М., 2000.— 534 с.
3. Воронов Е. М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных компромиссов.— М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.— 576 с.
4. Воронов Е. М., Владиславлев Д. Н. Конфликтные статико-динамические модели и стабильно-эффективные компромиссы на товарном рынке // Управление большими системами: Труды международной конф.— М.: ИПУ РАН, 1997.— С.123–136.
5. Воронов Е. М., Калинин С. А., Матвеев В. А., Бурлакин А. Н. Игровые компенсационные модели гомеостаза для исследования экологических процессов // Экологические системы и приборы.— 2000.— №8.— С.53–59.
6. Жуковский В. И., Молоствов В. С. Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности.— М.: МНИИПУ, 1988.— 132 с.
7. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. Т.4: Теория оптимизации систем автоматического управления.— М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.— 700 с.
8. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление.— М.: Наука, 2002.— 304 с.
9. Серов В. А., Холба Ю. Я., Суханов Н. А. Комбинированная вычислительная процедура многокритериального синтеза параметров нейроконтроллера в адаптивной системе управления промышленным роботом // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования.— 2001.— №1.— С.147–158.
10. Смольяков Э. Р. Сильное равновесие в бескоалиционных играх // Нелинейная динамика и управление.— М.: Физматлит, 2001.— С.355–362.
11. Voronov E. M., Repkin A. L. Problem of optimal control of the local system of aircrafts (LSA) resources on the basis of the game forecast // 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace.— 2004.
12. Voronov E. M., Karpunin A. A., Serov V. A., Sytchev S. I. Method of conflict-optimum guidance of the wing of two aircrafts on the basis of the stable-effective compromise // 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace.— 2004.

УДК 517.95

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

*Гарганеев А. Г., Ланграф С. В., Яровой А. Т.
ЗАО «ЭлеСи», г.Томск,
e-mail: jarovoi@phys.tsu.ru*

1. Введение

Асинхронные двигатели (АД), являются наиболее простыми дешевыми и надежными. Они нашли широкое применение при создании электроприводов (ЭП) запорной арматуры в нефтедобывающей отрасли.

Несмотря на простоту конструкции, АД сложен с точки зрения управления и создание специальных систем для регулирования и ограничения момента предполагает наличие информации о значении его текущих переменных состояния. Качество такого управления напрямую определяется точностью имеющейся информации.

К минимальному набору величин описывающих АД, необходимого для реализации системы управления моментом, относятся токи и напряжения статора, частота вращения ротора, потокосцепления ротора и момент, развиваемый на валу двигателя. Если токи, напряжения и частоту вращения можно измерить с помощью соответствующих датчиков, то определение значений потокосцеплений ротора и момента на валу двигателя затруднительно, так как требует наличия специальных измерительных устройств. В тоже время идея об упразднении датчика частоты вращения является привлекательной для многих разработчиков электропривода, так как тем самым повышается надежность и отказоустойчивость системы. Таким образом, проблема оценки переменных, определяющих состояние АД и неподдающихся непосредственному измерению, является актуальной при создании систем управления асинхронным ЭП.

Фильтр Калмана (ФК) является эффективным инструментом, служащим для идентификации параметров динамической системы.

2. Построение фильтра Калмана для наблюдения состояния асинхронного двигателя

Модель АД реализована в двухфазной неподвижной системе координат жестко связанной с обмоткой статора. Для расчетов используется система относительных единиц, в которой за базисные значения принимаются величины соответствующие номинальному режиму работы АД. Источник напряжения рассматривается как идеализированный при этом про-

цессы, происходящие в силовых цепях системы преобразователь — двигатель не рассматриваются. Модель АД учитывает влияние насыщения магнитной цепи, поэтому в основную систему уравнений включены коэффициенты, зависящие от магнитного состояния электрической машины. Эти коэффициенты корректируются на каждом шаге решения системы дифференциальных уравнений с помощью процедуры, предназначенной для вычисления магнитного состояния АД [5]. Данная процедура решает нелинейное алгебраическое уравнение, устанавливающее зависимость главного потокосцепления от токов статора. Ниже представлена система уравнений, описывающих динамику переменных состояния АД.

$$\begin{cases} p i_{sx} = l_{se}^{-1} (u_{sx} - r_{se} i_{sx} + \alpha'_r \psi_{rx} + \omega \cdot k_r \psi_{ry}) \\ p i_{sy} = l_{se}^{-1} (u_{sy} - r_{se} i_{sy} + \alpha'_r \psi_{ry} - \omega \cdot k_r \psi_{rx}) \\ p \psi_{rx} = k_r r_r i_{sx} - \alpha_r \psi_{rx} - \omega \cdot \psi_{ry} \\ p \psi_{ry} = k_r r_r i_{sy} - \alpha_r \psi_{ry} + \omega \cdot \psi_{rx} \\ m = \zeta_n k_r (\psi_{rx} i_{sy} - \psi_{ry} i_{sx}) \\ p \omega = J^{-1} (m - m_c) \end{cases} \quad (1)$$

здесь i_{sx} , i_{sy} — токи статора, ψ_{rx} , ψ_{ry} — потокосцепления ротора, m — момент на валу АД, ω — угловая частота вращения ротора, J^I — момент инерции, приведенный к валу АД с учетом относительной системы единиц, $\zeta_n = S_{s,n}/P_{элм.н}$ — номинальный параметр двигателя, обеспечивает определение относительного момента двигателя в долях от номинального электромагнитного момента.

При моделировании параметры АД требуют преобразований в соответствии с относительной системой единиц:

$$r_s = R_1 / Z_{\delta a3} ; \quad r_r = R'_2 / Z_{\delta a3} ; \quad l_{s\sigma} = X_1 / Z_{\delta a3} ; \quad l_{r\sigma} = X'_2 / Z_{\delta a3} ; \quad (2),$$

где $Z_{\delta a3} = U_{ном} / I_{ном}$ — базисное сопротивление, $U_{ном}$ — номинальное фазное напряжение АД, $I_{ном}$ — номинальный фазный ток АД.

С учетом всех упомянутых предложений уравнения дискретного фильтра Калмана будут выглядеть следующим образом:

Пусть $\vec{X}_k = (I_x, I_y, \psi_x, \psi_y, \omega)_k^T$ — вектор состояния описываемой системы тогда

$$\begin{cases} \vec{X}_{k+1}^* = A_k \cdot \hat{\vec{X}}_k + G_k \cdot \vec{U}_k \\ P_k^* = A_k \cdot P_k \cdot A_k^T + Q \\ K = P_k^* \cdot C^T \cdot (C \cdot P_k^* \cdot C^T + R)^{-1} \\ P_{k+1} = (1 - K \cdot C) \cdot P_k^* \\ \hat{\vec{X}}_{k+1} = \vec{X}_k^* + K \cdot (\vec{Y}_k - C \cdot \vec{X}_k^*) \end{cases}$$

\hat{X}_k — текущая оценка вектора состояния; \vec{Y}_k — вектор измерений (токи на обмотках статора); \vec{U}_k — вектор управления; R — матрица ковариаций шумов процесса; Q — матрица ковариаций шумов измерений; A_k — матрица, построенная по дифференциальной модели объекта; P_k — матрица ковариации ошибки оценки; K — матрица усиления.

Согласно системе (1) и предположению о том, что механическая постоянная времени много больше электрической постоянной времени при шаге дискретизации времени h имеем:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 - h \frac{(r_r + k_r^2 r_r)}{l_e} & 0 & h \frac{k_r^2 r_r}{l_e l_m} & h \frac{\omega_k k_r}{l_e} & 0 \\ 0 & 1 - h \frac{(r_r + k_r^2 r_r)}{l_e} & -h \frac{\omega_k k_r}{l_e} & h \frac{k_r^2 r_r}{l_e l_m} & 0 \\ h k_r r_r & 0 & 1 - h \frac{k_r r_r}{l_m} & -h \omega_k & 0 \\ 0 & h k_r r_r & h \omega_k & 1 - h \frac{k_r r_r}{l_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где k_r, r_r, l_e, l_m — параметры определяемые характеристиками двигателя.

4. Результаты моделирования

Для проверки функционирования созданной системы было проведено математическое моделирование АД (АИР100S4У3) и устройства оценки с ФК. В качестве среды моделирования использовалось приложение Simulink 4 пакета MATLAB 6.1. Процедуры для реализации модели АД и ФК произведены с помощью S — функций, вызываемых из среды Simulink, и реализованных в виде отдельных m — файлов.

Решение системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние АД, выполняется методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Шаг расчета модели АД принят равным $h = 1,6 \cdot 10^{-5}$ с, а шаг фильтра составляет $10 \cdot h$, т. е. в десять раз больше. Шаг расчета фильтра выбран с учетом предельного быстродействия микропроцессорной системы управления, предполагаемой для использования в данной системе.

Для испытания работы фильтра авторами были выбраны два режима пуска модели двигателя при частотах напряжения — 50Гц, рис.1 и 5Гц, рис. 2. Такой выбор обусловлен желанием исследовать качество получаемых фильтром оценок на максимальной и минимальной частотах вращения вала АД с учетом насыщения магнитной цепи. Каждый режим иллюстрируется графиками зависимости от времени измерений напряжений на обмотках статора, соответствующих измерений токов и сравнением оценок и реальных (рассчитанных при решении системы дифференциальных урав-

нений АД + процедура корректировки параметров при насыщении) значений потокосцеплений. Также режимы иллюстрируются сравнениями зависимостей от времени оценок электромагнитного момента и частоты вращения вала с соответствующими реальными величинами. Для обозначения оценок величин над символом, обозначающим данную переменную ставится знак «^».

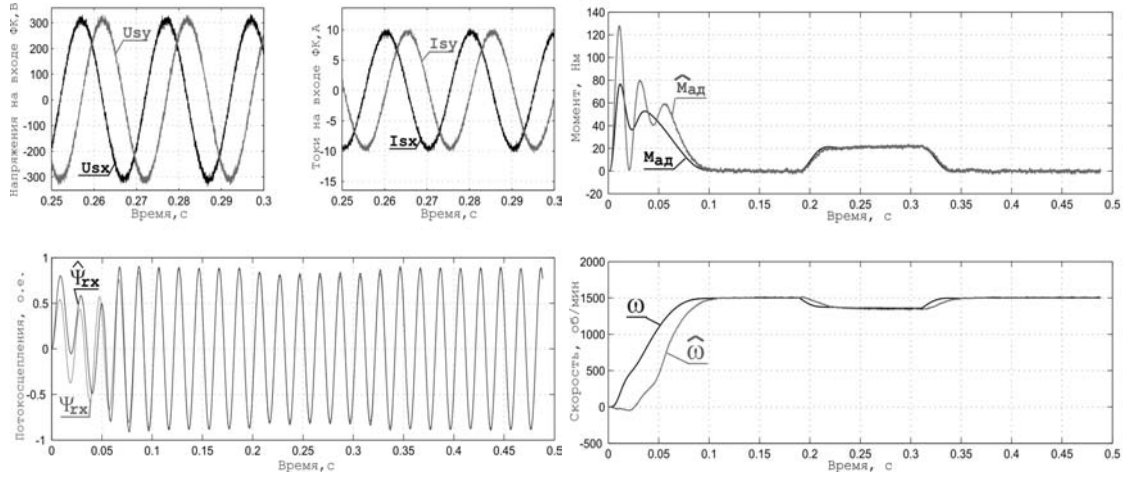


Рис. 1. Переходный процесс при пуске на частоту 50 Гц и последующем набросе нагрузки.

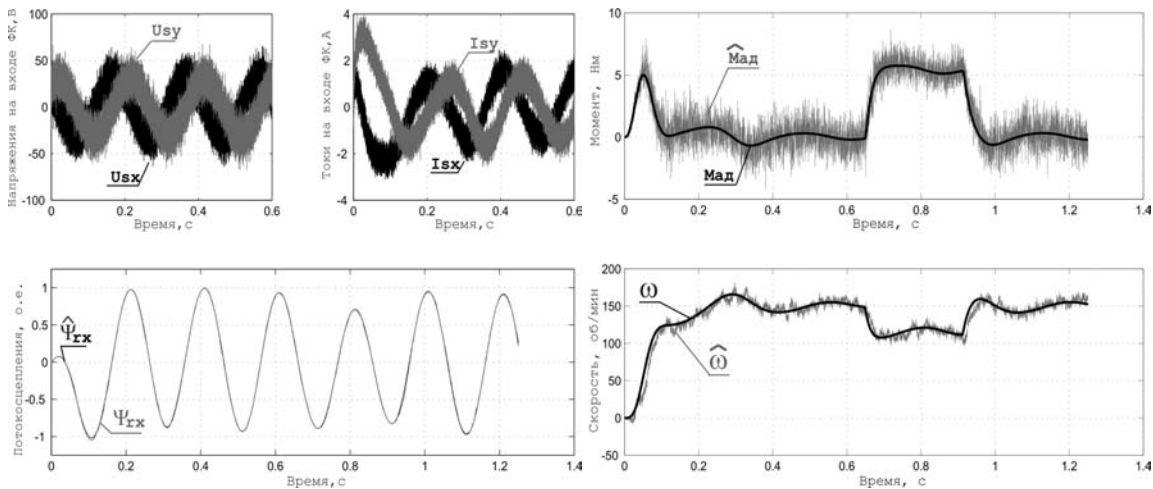


Рис. 2. Переходный процесс при пуске на частоту 5 Гц и последующем набросе нагрузки.

Для характеристики качества полученных оценок момента и частоты вращения были введены следующие величины:

$$\eta_M = \frac{|\hat{M} - M|}{M_H} \cdot 100\%, \quad \eta_\omega = \frac{|\hat{\omega} - \omega|}{\omega_H} \cdot 100\%$$

где M , ω — момент и частота; \hat{M} , $\hat{\omega}$ — оценка момента и частоты вращения соответственно; M_H , ω_H — номинальные значения момента и частоты.

Графики погрешностей оценок для двух режимов запуска приведены на Рис.3. В качестве комментария к полученным зависимостям можно отметить следующие факты:

а) В силу того, что фильтр является линейным, тогда как АД описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений, существуют режим в котором фильтр дает оценку существенно отличающуюся от истинного значения (погрешность может достигать 100% и больше) величин. Это проявляется при пуске и частично в переходных процессах. Тем не менее, такое поведение фильтра должно мало сказаться на качестве управления так как, например, при частотном пуске АД, характеристики двигателя изменяются значительно плавней.

б) В режимах отличных от прямого пуска фильтр выдает оценку удовлетворительного качества — $\leq 10\%$ в обоих частотных режимах. И даже при резком набросе нагрузки на вал двигателя качество оценки остается удовлетворительным $10\div 15\%$.

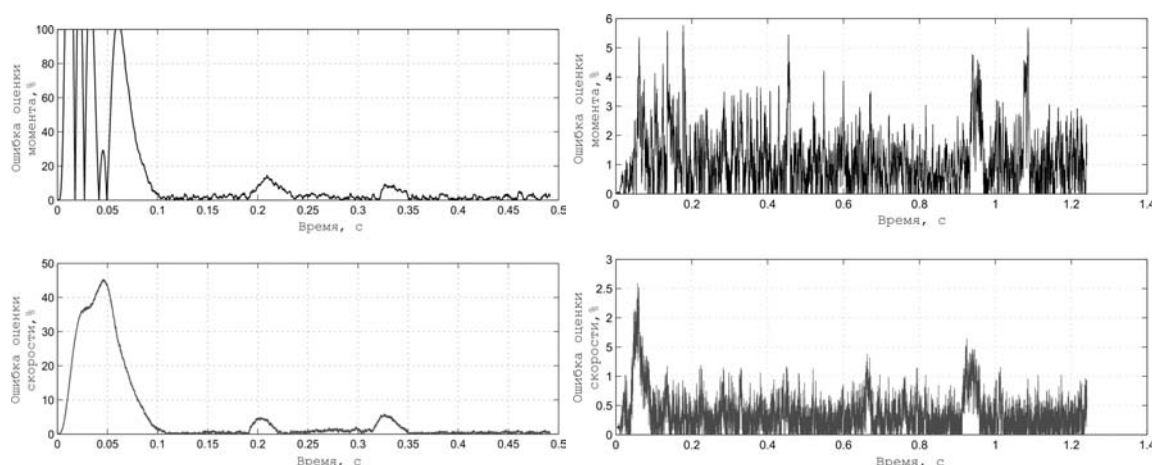


Рис.3. Зависимость ошибки оценки от времени для момента — η_m (сверху) и частоты вращения ротора η_ω (снизу) в режиме номинального запуска — $f=5\text{ Гц}$ (слева) и $f=50\text{ Гц}$ (справа).

5. Заключение

Результаты выполненной работы позволяют сделать вывод о достаточной точности и хорошей сходимости алгоритма ФК оценки переменных АД. Среди достоинств разработанного алгоритма оценки стоит отметить возможность адаптации к уровню помех и шумов измерений, а также инвариантность к изменениям параметров оцениваемого АД.

На данном этапе ведется работа по практической реализации созданного алгоритма на базе цифрового сигнального процессора TMS320C28 фирмы Texas Instruments.

Литература

1. *Олссон Г., Пиани Дж.* Цифровые системы автоматизации и управления.— СПб.: Невский Диалект, 2001.— 557с.
2. Sensorless Field Oriented Speed Control of Three Phase AC Induction Motor using TMS320F240.— Texas Instruments Application Note, Texas Instruments Europe, July 1997.
3. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний.— Наука, 1970.— 480с.
4. *Браммер К., Зифлинг Г.* Фильтр Калмана–Бьюси: пер. с нем.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1982.— 199 с.
5. *Шрейнер Р. Т.* Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты.— Екатеринбург: УРО РАН, 2000.— 654 с.

УДК 075.5

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATLAB ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ МЕТОДОМ ЖЕЛАЕМЫХ ЛАЧХ

Груздев В. В.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону,
e-mail:gruzdev@210100.2itb.com

Введение

На сегодняшний день существует множество различных методов синтеза регуляторов. Преимуществом метода желаемых логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАЧХ) является то, что он позволяет в достаточно полной мере учесть такие требования к желаемой системе управления, как астатизм, точность отработки критического воздействия, перерегулирование и быстродействие. В то же время ориентированность метода на графическое построение ЛАЧХ ограничивает его применение. Автором данный метод синтеза был автоматизирован путем разработки соответствующей программы **AmLANH** на языке MATLAB. Работа посвящена описанию этой программы и некоторым вопросам ее реализации в MATLAB [2].

Общие сведения о методе желаемых ЛАЧХ

При линеаризованном описании передаточная функция разомкнутой системы управления (РС) — это произведение передаточных функций (ПФ) объекта управления (ОУ) и управляющего устройства (УУ) [1]:

$$W_{PC}(p) = W_{OY}(p) \cdot W_{YU}(p).$$

При этом ЛАЧХ разомкнутой системы представляет собой сумму характеристик объекта и регулятора, поэтому, имея ЛАЧХ желаемой разомкнутой системы и ЛАЧХ объекта, можно получить ЛАЧХ регулятора простым графическим вычитанием. Сущность метода желаемых ЛАЧХ состоит в следующем. По определенной методике строится желаемая амплитудная характеристика разомкнутой системы. На том же графике строится ЛАЧХ объекта управления, затем графическим вычитанием из ЛАЧХ разомкнутой системы ЛАЧХ объекта получим ЛАЧХ управляющего устройства, по которой определяется его передаточная функция. Ключевым моментом является то, что для упрощения перехода от ЛАЧХ к передаточной функции в расчетах используются *асимптотические ЛАЧХ*.

Общие сведения о программе

Программа *AmLAHX* предназначена для выполнения в среде MATLAB 6 (R12.1) или выше и предоставляет пользователю следующие возможности:

1. имеет графический интерфейс, отслеживает различные ошибки (случайные или преднамеренные) в процессе работы (в том числе ошибки в исходных данных);
2. строит асимптотические ЛАЧХ динамических объектов, заданных в виде передаточных функций;
3. строит в диалоговом режиме желаемую ЛАЧХ разомкнутой системы по задаваемым критериям качества, в том числе, программа позволяет выбирать пользователю сопрягающие участки (их наклоны) в зависимости от вида ЛАЧХ объекта управления;
4. обеспечивает автоматическое вычитание из ЛАЧХ разомкнутой системы ЛАЧХ объекта управления и построение таким образом ЛАЧХ регулятора, результатом своей работы возвращает сопрягающие частоты и наклоны асимптот ЛАЧХ регулятора и его передаточную функцию;
5. все ЛАЧХ строятся с указанием наклонов асимптот, пользователь может сам определять цвета каждой ЛАЧХ в отдельности, а также формат надписей на графиках (толщина, высота).

Код программы открыт для свободного изменения. Скачать последнюю версию программы можно по адресу в сети Internet <http://210100.by.ru/amlahx>.

Алгоритм работы

В целом программа осуществляет расчеты по следующему алгоритму:

1. Анализ входных аргументов.
2. Формирование исходных данных (числителя и знаменателя ПФ ОУ) и свойств графиков и надписей в зависимости от режима работы.
3. Формирование массивов структур нулей и полюсов ПФ ОУ.
4. Поиск одинаковых нулей и полюсов и удаление соответствующих структур из массивов.
5. Поиск кратных нулей и полюсов и соответствующая оптимизация массивов структур.
6. Расчет астатизма, наклонов асимптот, коэффициента усиления канонической формы ПФ ОУ.
7. Объединение массивов структур нулей и полюсов, расчет сопрягающих частот и сортировка общего массива по возрастанию величины сопрягающих частот.

8. Построение асимптотической ЛАЧХ.
9. Выход из программы, если выбран 1-й режим работы
10. Ввод критериальной стратегии синтеза (КСС).
11. Получение дополнительной информации о желаемом качестве ЛАЧХ РС по КСС.
12. Построение низкочастотных, среднечастотных и высокочастотных частей ЛАЧХ РС в соответствии с КСС.
13. Ввод наклонов сопрягающих участков.
14. Оптимизация графика желаемой ЛАЧХ РС, исходя из наклонно сопрягающих участков.
15. Сортировка сопрягающих частот ЛАЧХ ОУ и ЛАЧХ РС, корректировка дублирования частот и формирование массива структур, описывающего сопрягающие частоты и наклоны асимптот ЛАЧХ УУ.
16. Результат синтеза: график ЛАЧХ и ПФ управляющего устройства.

Командная строка

Полная командная строка для запуска программы имеет вид

`[src, uu, handles] = amlahx(flag, num, den, prm);`

где *flag* — флаг режима работы (этот и все последующие аргументы могут быть опущены): 1 — построение только ЛАЧХ заданного объекта; 2 — синтез регулятора методом желаемых асимптотических ЛАЧХ (по умолчанию); 3 — вызов меню в начале работы (интерактивный режим);
num, den — соответственно вектора коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции, начиная с коэффициента при старшей степени, степень (порядок) полинома при этом равен количеству элементов вектора минус 1;

prm — структура свойств вида ЛАЧХ. Можно управлять видом ЛАЧХ (цвет, толщина и другое), передав четвертым параметром полную структуру свойств согласно примеру:

```
prm.ou.Color='red'; % цвет ЛАЧХ ОУ
prm.ou.LineWidth=1; % толщина ЛАЧХ ОУ
prm.ou.pt='rp'; % тип соединительных точек в формате 'plot'
prm.rs.Color='red'; % цвет ЛАЧХ РС
prm.rs.LineWidth=1; % толщина ЛАЧХ РС
prm.rs.pt='ko'; % тип соединительных точек в формате 'plot'
prm.yu.Color='red'; % цвет ЛАЧХ УУ
prm.yu.LineWidth=2; % толщина ЛАЧХ УУ
prm.yu.pt=''; % тип соединительных точек в формате 'plot'
amlahx(2,[1 0.2],[100 110 11 1 0],2,prm); % вызов программы
```

src — структура, полностью описывающая асимптотическую ЛАЧХ ОУ;

uu — структура, полностью описывающая синтезированную асимптотическую ЛАЧХ УУ;

handles — вектор указателей на созданные графические объекты.

AmLANH без параметров работает в демо-режиме, в этом случае

$num = [1 \ 0.2]$, $den = [100 \ 110 \ 11 \ 1 \ 0]$, $flag = 2$.

Режимы работы

AmLANH имеет 3 режима работы

1. режим построения асимптотической ЛАЧХ ОУ;
2. режим синтеза регулятора (режим по умолчанию);
3. интерактивный режим синтеза регулятора (основной режим).

Для запуска программы в первом режиме в командной строке MATLAB следует набрать **amlahx(1,num,den)**. В этом режиме программа строит только асимптотическую ЛАЧХ объекта управления (рис. 2). Возвращает программа массив структур *src*. Структуры описывают динамические звенья, из которых построен ОУ. Каждая структура состоит из 9 полей:

- вещественная *ans.a* корня числителя или знаменателя;
- мнимая часть *ans.b* корня (под комплексно-сопряженную пару корней отводится 1 структура);
- кратность *ans.krt*;
- вид корня *ans.vid* (нуль (1) или полюс (-1));
- порядок *ans.por* корня (1 если корень вещественный, 2 — корень мнимый (то есть имеем комплексно-сопряженную пару корней));
- параметры динамического звена, имеющего такой корень или такую комплексно-сопряженную пару корней: постоянная времени *ans.T*, колебательность *ans.e*, частота среза *ans.w*, десятичный логарифм частоты среза *ans.lgw*.

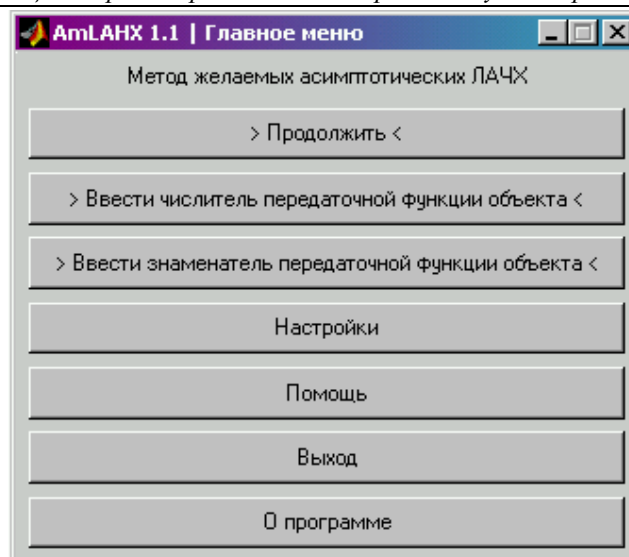
Программа во 2-м и 3-м режимах работы включает все возможности 1-го режима. Функционально 3-й режим отличается от 2-го только возможностью интерактивно задать числитель и знаменатель ПФ ОУ, а также параметры графиков, поэтому рассмотрим подробнее именно работу в 3-м режиме на примере синтеза регулятора для объекта

$$W_{oy}(p) = \frac{0.2 \cdot (5 \cdot p + 1)}{p \cdot (p + 1) \cdot (100 \cdot p^2 + 10 \cdot p + 1)}.$$

В командной строке MATLAB набираем

amlahx(3,[1 0.2], [100 110 11 1 0]).

Сразу после запуска программы появляется «Главное меню» (рис. 1). В надписях в этом и других окнах программы буква 'я' заменена на 'ь' для обеспечения совместимости с различными реализациями MATLAB, некоторые из которых выдают ошибку при наличии в коде букв 'я'. Меню формируется функцией $k = umenu(Title, pos, xHeader, varargin)$, которая является модификацией поставляемой с MATLAB функцией 'menu' и отличается от нее возможностью через входные аргументы задавать заголовок *Title* и положение *pos* окна с меню.

Рис. 1. Главное меню *AmLANX*.

Опишем основные пункты меню. Пункты «Ввести числитель/знаменатель передаточной функции объекта» дают возможность ввести числитель и знаменатель в интерактивном режиме. Если на каком-то шаге ввод будет прерван, а в командной строке в начале работы *AmLANX* были переданы коэффициенты числителя/знаменателя, то числитель/знаменатель все равно считается заданным. При выборе этих пунктов открывается меню (рис. 2).

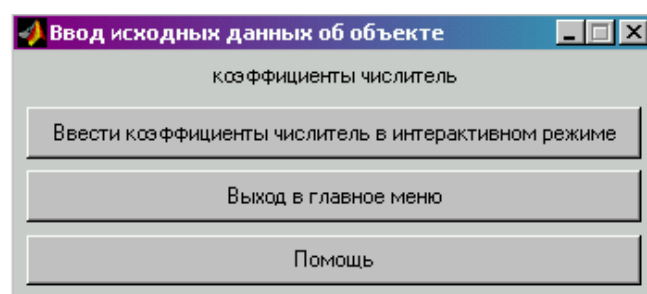


Рис.2. Меню ввода исходных данных.

При выборе первого пункта этого меню у пользователя запрашивается порядок полинома, после чего открывает окно интерактивного ввода коэффициентов полинома, реализуемого с помощью функции `[M, outstr] = uniinput(SM, FStr, mflg, TUIStr, Req, MMVal)`, которая входит в дистрибутив программы *AmLANX*. Функция **uniinput** может быть использована отдельно от *AmLANX* в качестве удобного средства для ввода матриц, векторов и полиномов. Для полинома 3 порядка вид окна приведен на рис. 3.

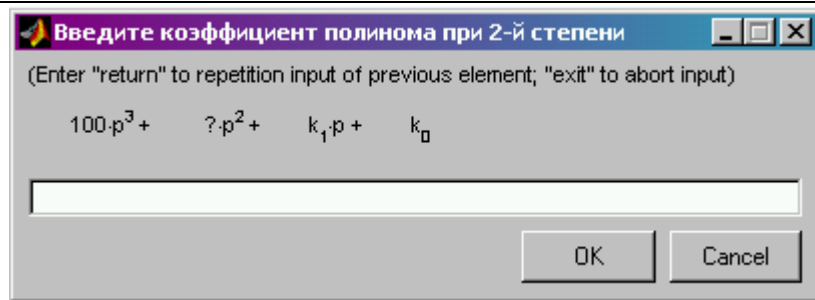


Рис.3. Окно ввода коэффициентов полинома.

Каждый коэффициент полинома вводится поочередно с отображением на экране. Вводимому в данный момент коэффициенту соответствует знак '?'. Для повторного ввода в случае ошибки следует набрать 'return'. Вывод на экран полинома в привычном формате осуществляется путем присвоения свойству окна 'Interpreter' значения 'tex' (использование для интерпретатора TeX для выводимых на экран сообщений). По окончании ввода полином выводится на экран (рис. 4).

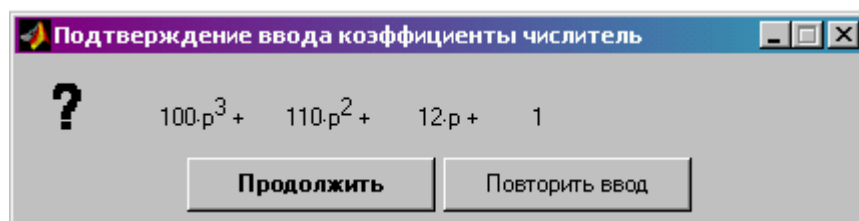


Рис.4. Окно подтверждения ввода коэффициентов полинома.

Пункт главного меню 'Настройки' позволять задать цвета и толщину графиков (рис.5) при условии, что в начале работы не был задан аргумент *p_{гт}*, в противном случае, все изменения в «Настройках» не будут иметь силы. Начальные настройки читаются из файла 'amlahx.ini', причем, все внесенные изменения действуют только в данном сеансе работы, поэтому, чтобы изменить начальные настройки, необходимо отредактировать соответствующим образом файл 'amlahx.ini'.

Пункт 'Продолжить' — продолжение работы при условии, что через меню или командную строку заданы полиномы числителя и знаменателя ПФ ОУ, иначе выдается предупреждающее сообщение.

После выбора пункта 'Продолжить' выполняется автоматическое построение ЛАЧХ ОУ с указанием наклонов (см. рис. 8). Если объект идеальный (порядок числителя больше порядка знаменателя) пользователю предлагается остановиться и задать реальный объект. В ходе расчетов программа находит кратные корни в числителе и знаменателе, а также находит и удаляет одинаковые корни числителя и знаменателя. Результатом расчетов является описанный выше массив структур *sps*.

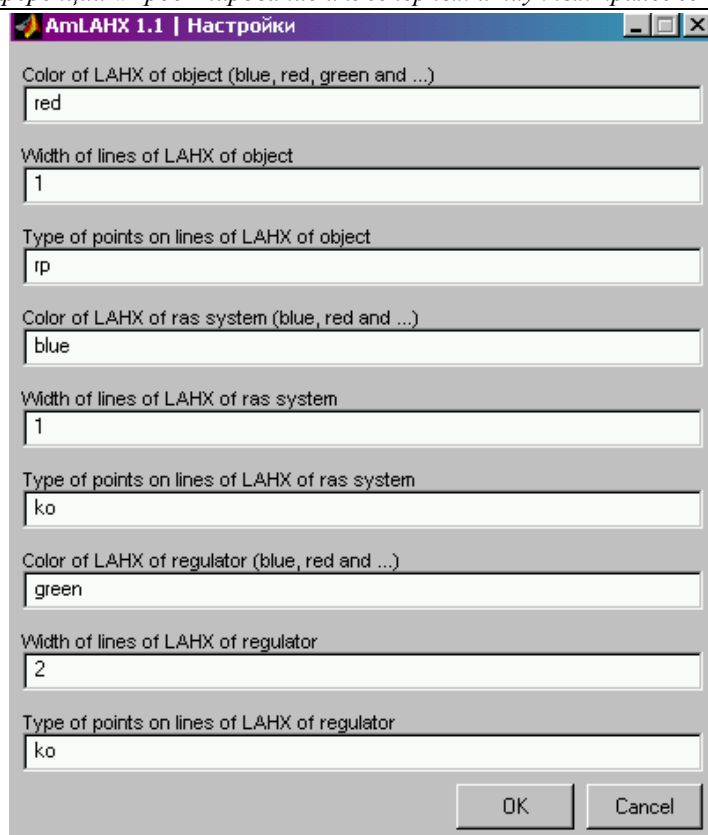


Рис.5. Окно 'Настройки AmLANX'.

После построения ЛАЧХ ОУ открывается окно задания критериальной стратегии синтеза (рис. 6). Задаем степень астатизма $\nu_{\text{жел}} = -2$, желаемое время регулирования $t_{\text{жел}} = 40$ сек, коэффициент усиления РС $k_{\text{ЖЕЛ}} = 2$, желаемое перерегулирование $\sigma_{\text{ЖЕЛ}} = 20\%$.

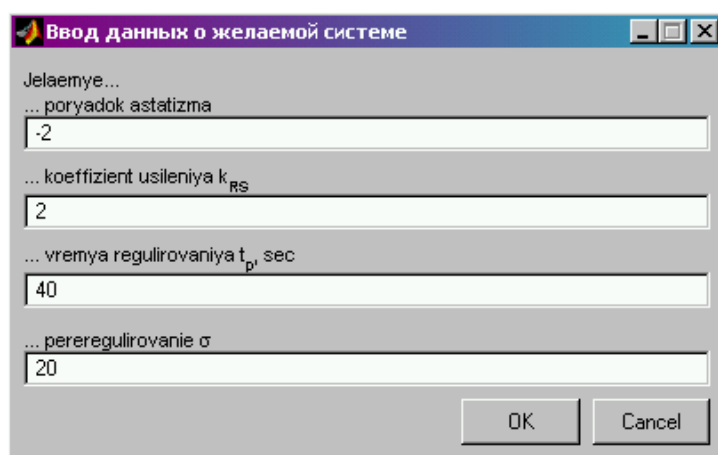


Рис. 6. Окно ввода параметров желаемой РС.

Далее по номограммам, исходя из $t_{\text{жел}}$ и $\sigma_{\text{ЖЕЛ}}$, пользователь должен указать желаемую частоту среза $\omega_c^{\text{жел}}$ (частота на которой СЧ-часть желе-

мой ЛАЧХ пересекает ось частот) и допустимую величину отклонения ЛАЧХ на СЧ-части Δl и $\Delta \phi$. В данном примере $\omega_c^{\text{жел}} = 0.35 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\Delta l = \pm 20$ дБ (рис.7).

Рис.7. Окно ввода параметров, определяемых по номограммам.

Программа выполняет необходимые расчеты и строит НЧ- и СЧ-части желаемой ЛАЧХ с указанием наклонов, после чего запрашивает у пользователя желаемый наклон отрезка, сопрягающего НЧ- и СЧ-части. Выберем наклон -60 дБ/дек.

Заключительный этап работы программы — вычитание из ЛАЧХ РС ЛАЧХ ОУ и получение таким образом ЛАЧХ УУ. Этот этап состоит из двух шагов. Первый шаг — расчет массива структур уу, соответствующего ЛАЧХ регулятора. Эти структуры описывают сопрягающие частоты и наклоны асимптот на них. Каждая структура состоит из 5 полей:

- десятичный логарифм сопрягающей частоты *ans.lgw*;
- наклон асимптоты на этой частоте *ans.nakl*;
- порядок и вид динамического звена *ans.por*, соответствующего данной сопрягающей частоте (например, если для сопрягающей частоты известно, что порядок динамического звена равен 2, это означает, что это либо 2 пропорционально-дифференцирующих (ПД) звена, либо ПД-звено 2-го порядка);
- сопрягающая частота *ans.w*;
- постоянная времени динамического звена *ans.T*.

Второй шаг — по рассчитанной структуре строится ЛАЧХ регулятора. На этом работа программы завершается. На заключительном графике программа строит 3 ЛАЧХ: ОУ, РС, УУ с указанием наклонов (рис.8) и в окне выводит ПФ синтезированного регулятора (рис. 9).

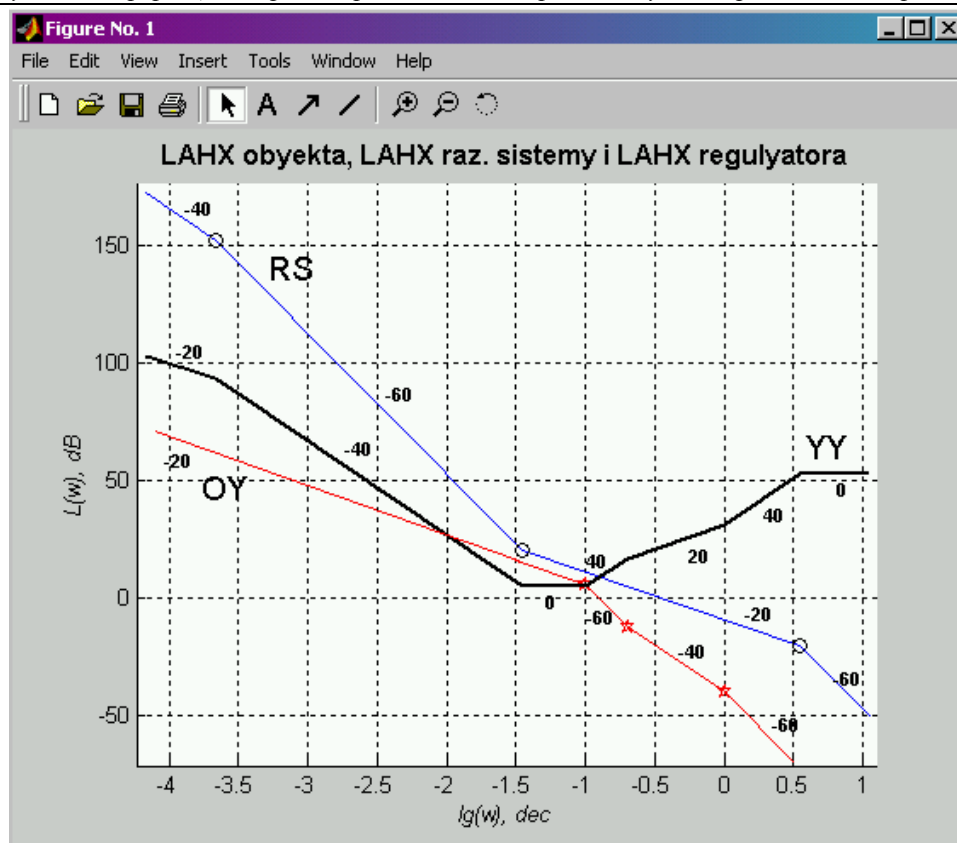


Рис. 8. Окно с построенными ЛАЧХ ОУ, РС и УУ.

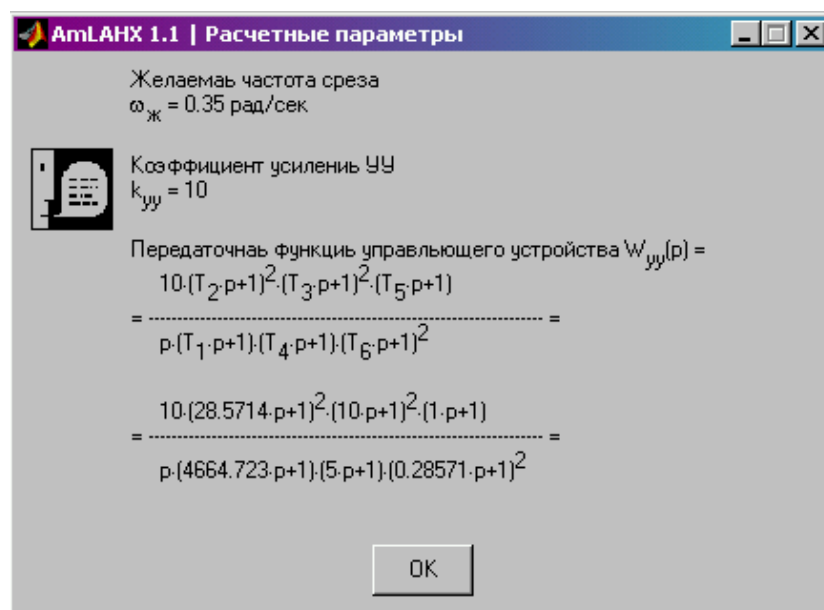


Рис. 9. Окно с информацией о синтезированном регуляторе.

Выводы

Рассмотренная программа была применена автором в бакалаврской работе [3] для синтеза регулятора контура тока в системе управления элек-

Литература

- 955

УДК 681.3.068

ТЕХНОЛОГИИ MATLAB В ИНТЕЛЛЕКТУАЛИЗАЦИИ ЗДАНИЙ

Деменков Н. П.

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва,
e-mail:demenkov@iu1.bmstu.ru*

1. Введение

Реализация концепции «Интеллектуальное здание» в России перестает быть хаотичной и неопределенной, на рынке формируются устойчивые связи и отношения, замечен интерес государственных структур и регулирующих органов к новой технологии, возрастает роль предпроектного исследования и стадии проектирования в общем цикле исполнения проекта, профессиональное управление проектом становится более важным, чем знание конкретных протоколов и интерфейсов, уделяется больше внимания вопросам стандартизации для систем автоматизации и управления зданиями.

Отмечаемый сегодня рост интереса к возможностям телекоммуникационной инфраструктуры зданий в жилом секторе, особенно в так называемой «элитной застройке», отражает назревшую потребность в улучшении разнообразных потребительских свойств жилого фонда с помощью современных услуг связи, что отвечает последним мировым тенденциям.

Концепция «Интеллектуальное здание» подразумевает построение единой телекоммуникационной инфраструктуры, объединяющей все инженерные системы здания (офиса, квартиры), подходящие к нему сети связи и информационные ресурсы с целью обеспечения возможности гибкого управления этими системами в целях создания комфортной и безопасной среды обитания внутри здания и интеграции этой среды с единым информационным пространством. При этом появляется задача оптимизации (минимизации) расходов на поддержание этой среды, а указанное управление осуществляется также с помощью услуг связи.

Следует отметить, что потребности в услугах связи непосредственно инженерных систем «интеллектуального» здания незначительны относительно других услуг связи и практически относятся к низкоскоростным службам передачи данных. Поэтому все потенциальные потребности в телекоммуникационных сетях и услугах внутри «интеллектуальных» зданий могут быть оперативно и экономически эффективно реализованы поставщиками услуг связи (телекоммуникационными операторами) в едином технологическом цикле.

Это делает возможным экономически эффективное телекоммуникационное обслуживание объектов (в том числе территориально распределенных групп объектов) с помощью специализированных сетей связи, включая крупнейшую в Европе транспортную мультисервисную волоконно-оптическую сеть SDH, комплекс наложенных цифровых сетей связи различного назначения (мобильная, телефонная, передачи данных, высокоскоростного доступа в Интернет, кабельного ТВ) и широкого набора решений для «последней мили» («оптика», «коаксиал», «медная пара»), обеспечение надежности и качества обслуживания, включая резервирование, управление сетью (сетями), мониторинг каналов вплоть до «розетки» пользователя и т. п.

Термин «Интеллектуальное здание» предполагает централизованное управление зданием, обеспечивающее следующие сервисы: услуги для удобства управления зданием (пейджинговая связь, информационная система, обработка жалоб арендаторов/жильцов); услуги инфраструктуры (аренда сервера, офисные системы, почтовые системы, видео по требованию, управление не занятыми площадями, телекоммуникации, управление зданием); услуги безопасности (системы сигнализации и кабельного телевидения, система управления доступом, пожарная сигнализация, охранный контроль доступа); услуги по планированию и инспектированию бизнеса и финансов (учет основных фондов и техники, складская отчетность, документооборот, системы оптимизации энергетических и других затрат).

Уже в ближайшем будущем эти сервисы как единое целое станут частью нашей повседневной жизни, поскольку каждый из них уже существует, но пока используется по отдельности, как, например, локальные сети (LAN) и системы видеоконтроля. Созданные и управляемые независимо, подобные системы довольно дороги, так как происходит дублирование ресурсов (независимые сети вместо структурированной многофункциональной сети, отдельные ресурсы, независимый контроль управления, несогласованные избыточные действия, нерациональное использование пространства, и т. д.) с одной стороны, и с другой стороны, не может быть обеспечено равномерное и относительно недорогое автоматическое выполнение этих услуг.

Понятие «Интеллектуальное здание» фактически предполагает создание открытых систем автоматизации зданий (BAS - Building Automation System), то есть систем, в которых совместно работают и обмениваются необходимой информацией приборы и оборудование различных фирм - производителей. Такой обмен информацией и взаимодействие возможны благодаря использованию стандартных протоколов, таких как BACnet, открытых протоколов, таких как LonWorks и OPC (OLE for Process Control) и ставших фактически стандартными, таких как MODBUS. Именно поэтому такое большое внимание уделяется различным протоколам для BAS.

SCADA-системы предоставляют уникальные интеграционные решения для мониторинга и управления системами безопасности, кондиционирования и вентиляции воздуха, энергетики, пожаробезопасности, лифтового хозяйства как в рамках отдельного здания, так и комплекса зданий и сооружений. Это по-настоящему открытое и полностью резервируемое программное обеспечение, которое легко масштабируется от самых малых до самых больших систем. В сочетании с преимуществами применения свободно программируемых контроллеров в построении «Интеллектуального здания», возможности интеграции с оборудованием закрытых протоколов, системы визуализации и диспетчеризации для «Интеллектуального здания» на основе SCADA-систем обеспечат невысокую стоимость владения.

В статье обосновываются основные преимущества использования интеллектуальных технологий при создании современных зданий. Под интеллектуальной системой понимается совокупность технических средств и программного обеспечения, объединенная информационным процессом, работающая автономно или во взаимосвязи с человеком (коллективом людей), способная синтезировать цель, вырабатывать решения о действии и находить рациональные способы достижения цели на основе сведений и знаний, при наличии мотивации [1].

В интеллектуальных зданиях повышается эффективность функционирования большинства систем и оперативность принятия решений. Внедрение интеллектуальных технологий позволяет добиться высокой безопасности работы и проживания, комфортности и престижности помещений, ресурсосбережения (за счет снижения потребления электроэнергии, воды и тепла). Такие здания отличаются возможностью предотвращения аварийных ситуаций (или снижения потерь при их возникновении), а также возможностью дистанционного мониторинга и управления подсистемами здания, что в итоге приводит к повышению доходности здания, быстрому возврату капиталовложений и снижению эксплуатационных расходов.

Особое место в практической реализации отведено анализу использованного оборудования с энергосберегающими технологиями, проблемам применения типовых и унифицированных решений в автоматизированных системах интеллектуальных зданий.

Актуальность рассмотрения интеллектуальных систем управления зданием обусловлена их способностью к накоплению и обобщению знаний, к выработке гипотез и прогнозу, к принятию решений, их объяснению и т. д. Информационные технологии, основанные на знаниях и используемые при создании систем управления зданием, эффективность предсказания развития той или иной ситуации, обеспечивают представление и организацию обработки знаний о предметной области на различных уровнях иерархии.

Основной целью интеллектуального управления в условиях значительной неопределенности является получение гибких, нечетких, «мягких» стратегий управления на основе знаний о регулируемых и регулирующих факторах, оценка их свойств, состояний и взаимовлияние сложных объектов искусственной и природной среды, определение динамики и тенденций развития объектов в условиях меняющегося влияния среды их функционирования, а также выработка рекомендаций, обеспечивающих устойчивое функционирование, результаты чего имеют полное метрологическое обоснование их качества.

Содержанием проводимых исследований является: внедрение нечетких методов для оперативного управления (мониторинг, диагностика, автонастройка и т. д.) инженерными сооружениями на основе нечетких регуляторов с целью повышения уровня интеллектуальной и информационной поддержки подсистем управления зданием; разработка методов автонастройки распределенных регуляторов как по кривой разгона объекта, так и с использованием нечетких алгоритмов. Разрабатываемые методы должны использовать качественную информацию о технологических и экологических параметрах, работать в реальном времени и обеспечивать уменьшение вредного влияния в процессе своей деятельности.

Конкретной предметной областью является автонастройка промышленных контроллеров для управления различными подсистемами здания, прежде всего, систем инженерного обеспечения здания — насосы водоснабжения, отопления и пожаротушения, системы промышленного кондиционирования.

Проводимые работы являются оригинальными, так как основаны на собственных методах, методиках и ПО; соответствуют мировому уровню, так как используют ПО, LON-технологии и аппаратуру компаний Schneider Electric, Lexel, Echelon и др.

2. Решение многокритериальных задач оптимизации в условиях качественной неопределенности

Проблема управления зданием включает в себя решение множества весьма сложных задач, нелинейных, трудно формализуемых и требующих знаний по многим аспектам жизнедеятельности, в т.ч. по мониторингу окружающей среды. В целом, любая мониторинговая система должна рассматриваться как экспертная система, которая выполняет контроль над состоянием среды и помогает человеку влиять на это состояние.

Особенностью системы управления зданием является то, что она состоит из множества разделенных компонентов, что требует преобразования традиционной модели системы управления в систему с распределенным алгоритмом управления.

Особенность инженерных сооружений в современном здании состоит в том, что управление объектами осуществляется по неполной и неточной информации, собираемой с помощью датчиков. Часто возникают ситуации, когда или отсутствуют необходимые датчики первичной информации, или существующие средства измерений не обеспечивают получение требуемой информации в темпе с процессом, либо в наличии имеется лишь качественная информация об объекте управления. В таких ситуациях необходимо иметь информационные технологии, которые позволяют на основе компьютерной обработки качественной или нечеткой информации об объекте и целях управления получить требуемую информацию для управления.

При этом требуется оценить техническое состояние объектов, их экологичность и влияние на человека и окружающую среду, а также другие компоненты взаимодействия объекта, человека и окружающей среды. Спецификой управления является несоблюдение в полной мере принципов наблюдаемости, идентифицируемости и, как следствие, полной управляемости объектом.

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации в постановке, когда цели, исходы (значения критериев) и альтернативы (действия) заданы нечетко, но для которой отношения предпочтения, т. е. функция полезности, заданы четко.

Для решения поставленной задачи оптимизации нужно определить и максимизировать функцию полезности рассматриваемых альтернатив:

$$\max\{U(z_1, z_2, \dots, z_k)\}, \quad (1)$$

где $z_i = f_i(x \in S \subset R^n)$, $i = 1 \dots k$, — составляющие вектора критериев, x — точка в пространстве решений, S — множество допустимых решений.

Основной трудностью, возникающей при решении поставленной задачи, является проблема получения математического описания функции полезности U [2]. В теории полезности функция полезности U рассматривается и рассчитывается как вероятностная величина, однако для многих сложных неформализованных задач принятия решений оценить многомерное распределение вероятности очень сложно и даже неразрешимо.

Если же функцию полезности рассматривать не как вероятностную, а как нечеткую величину, а функции принадлежности нечетких множеств рассматривать как субъективные измерения лиц, принимающих решения (ЛПР), то многокритериальную задачу оптимизации можно представить в виде иерархической декомпозиции (рис. 1), где множество, формализующее глобальную цель, обозначено M , множество целей — G , а множество альтернатив — X . Если цели представляются слишком сложными понятиями, их можно представить в виде иерархии более простых понятий. Элементы иерархии, т. е. цели и альтернативы, являются нечеткими множествами G_j , $j = 1 \dots m$, где m — количество целей и X_r , где $r = 1, \dots, l$, l — количество альтернатив. L_{n-1} , L_n , L_{n+1} — уровни иерархии. Функция полезности рас-

сма­три­ва­ет­ся как функ­ция при­над­ле­ж­но­сти гло­баль­ной це­ли (M) на мно­жест­ве альтер­на­тив (обозначается $\mu_m(X)$), то есть тре­бу­ет­ся по­лу­чить: $\mu_m(X)$.

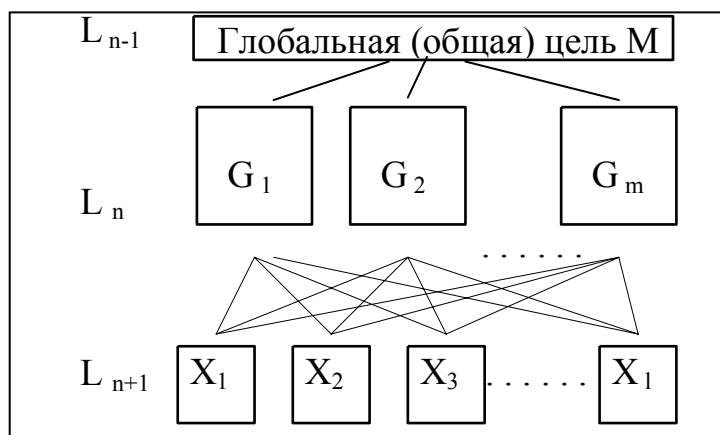


Рис. 1. Иерархическая декомпозиция многокритериальной задачи оптимизации.

Метод анализа иерархий (МАИ), являясь методом решения многокритериальных задач в сложной обстановке с иерархическими структурами, включающими неформализованные элементы [3], используется как косвенный метод определения функций принадлежности нечетких множеств [4].

Функции принадлежности нечетких множеств, формализующих каждый критерий (сложный, представляемый в виде иерархии или простой) определяются на множестве альтернатив, при этом множество альтернатив является базовым для нечетких множеств критериев. На каждом уровне мы имеем различные четкие упорядоченные множества, которые состоят из элементов, являющихся нечеткими (качественными) и определяются каждой своей функцией принадлежности. Элементы каждого уровня являются нечеткими подмножествами четкого упорядоченного множества и определяются именно в этом смысле.

В [5, 6] доказана справедливость рассмотрения глобального вектора приоритетов альтернатив (вектора приоритетов) последнего уровня как функции принадлежности глобальной цели решения задачи, которая, в свою очередь, может рассматриваться как функция полезности при решении многокритериальных задач в нечеткой постановке. Это утверждение позволяет применять МАИ для решения таких многокритериальных задач, как оценка нечетких моделей сложных систем, где требуется формализация качественных значений физических величин на количественных шкалах.

Таким образом, МАИ может эффективно использоваться не только для принятия решений в неформализованных сферах и решения задач ранжирования конечного множества сложных объектов, представленных в

виде иерархической структуры, но и для принятия решений в технических задачах, где требуется формализация всех нечетких понятий с помощью нечетких множеств. Это открывает дополнительные возможности для внедрения новых информационных технологий, например, для замены диспетчеров при управлении зданием, улучшения качества управления, позволит строить интеллектуальные системы, способные принимать решения и адекватно реагировать на изменения ситуации на основе знаний человека.

3. Нечеткий логический регулятор

Разработаны методика и программное обеспечение, основанные на предложенном подходе решения неформализованных задач оптимизации, для разработки модели нечеткого логического регулятора (НЛР) при управлении сложными техническими объектами. Основная часть информации, необходимая для построения модели, является качественной или нечеткой. Информация представлена в виде правил, выраженных на качественном языке естественных понятий и называемых лингвистическими правилами управления (ЛПУ).

В качестве импликации используется операция минимума, если правило формулируется в виде если-то, или операция максимума, если используется правило если-иначе. В качестве правила вывода используется композиционное правило, при котором композиция рассчитывается как максимумная.

Для выбора четкого значения функции управления применяется метод весов, по которому в качестве единственного значения для управления выбирается значение, имеющее максимальную функцию принадлежности.

Методика позволяет оценить значимость входных ЛП, относительную важность ЛПУ в технологическом процессе и достоверность ЛПУ при помощи получаемых качественных значений и при этом учитывать степень влияния каждой входной переменной на управление.

Если для управления используются несколько выходных величин, составляются и оцениваются иерархические структуры по каждой переменной.

Программное обеспечение реализует предложенную методику в пакете MATLAB и может быть реализовано на любом свободно программируемом контроллере с транслятором языка C++.

Спроектированный НЛР вырабатывает управляющее воздействие с учетом различных параметров и действует адекватно текущей ситуации.

Модель получения управления, т. е. модель регулятора, представлена в виде иерархической структуры (рис.2), элементами которой являются влияющие на процесс входные лингвистические переменные (ЛП), лин-

гвистические правила управления, в которых задействованы эти переменные, и качественные значения этих лингвистических переменных.

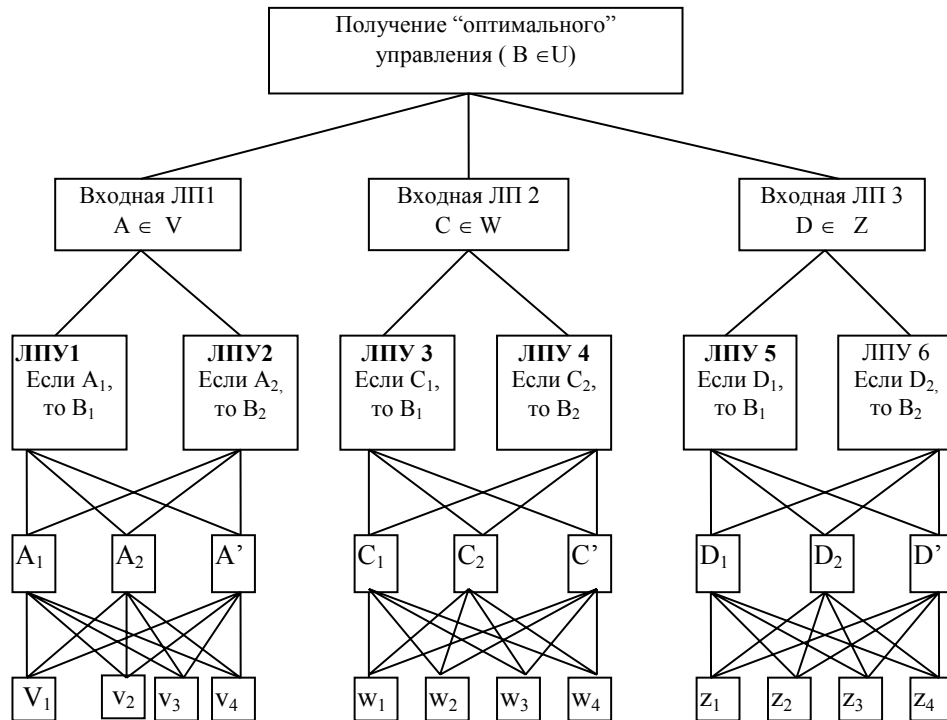


Рис. 2. Иерархическая декомпозиция задачи проектирования НЛР.

На первом уровне выделяется основная цель решения задачи - получение «оптимального» управления. Так как управление зависит только от соответствующих входных переменных, то на втором уровне выделяются входные ЛП, влияющие на указанное управление, а на третьем уровне выделяются ЛПУ для получения выделенного управления с помощью перечисленных входных ЛП. На четвертом уровне выделяются качественные значения входных ЛП. Достоверность ЛПУ учитывается на основании оценки качественных значений текущих данных наблюдения. На пятом уровне выделены элементы, которые являются количественными значениями используемых входных ЛП, то есть универсальными множествами нечетких множеств термов ЛП, и оценить их функции принадлежности.

На рис. 2 V , W и Z — универсальные множества с базовыми переменными v , w и z соответственно. Качественная оценка значений входных переменных, использующихся в ЛПУ, формализуется нечеткими подмножествами A , C и D множеств значений параметров V , W и Z соответственно, а качественная оценка значений управляющего воздействия u формализована нечетким подмножеством B , множества воздействий U . На рисунке представлена ситуация, когда имеется три входных переменных, для каждой переменной существует по два ЛПУ и, соответственно, по два качественных значения; A' , C' , D' — качественные данные наблюдения для ЛП 1, 2, 3 соответственно.

Высказывание типа «если A , то B » есть бинарное нечеткое отношение в $V \bullet U$:

Если A , то $B = A \bullet B$, которое является декартовым произведением A и B .

Для преобразования нечетких выводов на лингвистическом уровне для вычислений используется метод, основанный на композиционном правиле вывода, которое интерпретируется как процесс решения системы уравнений назначения в отношениях, в которых нечетким ограничением назначаются лингвистические значения.

Если V и U — два универсальных множества с базовыми переменными v и u соответственно, $R(v)$, $R(v, u)$ и $R(u)$ обозначают ограничения на v , (v, u) и u соответственно и представляют собой нечеткие отношения в V , $V \bullet U$ и U , а A и F — нечеткие подмножества множеств V и $V \bullet U$, то композиционное правило вывода утверждает, что решение уравнений назначения $R(v)=A$, $R(v, u)=F$ имеет вид $R(u)=A \circ F$, где $A \circ F$ — композиция A и F .

Пусть A' , A и B — нечеткие подмножества множеств V , U и U соответственно.

Основные операции, которые используются при получении нечеткого вывода, при помощи композиционного правила вывода описываются следующим образом.

Объединением нечетких множеств A и B в V называется нечеткое множество $A + B$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_{A+B}(v) = \max \{ \mu_A(v), \mu_B(v) \}, v \in V.$$

Декартово произведение $A_1 \bullet \dots \bullet A_n$ нечетких множеств A_i в V_i , $i=1, \dots, n$ определяется как нечеткое множество A в декартовом произведении $V = V_1 \bullet \dots \bullet V_n$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_A(v) = \min \{ \mu_{A_1}(v_1), \dots, \mu_{A_n}(v_n) \}, v=(v_1, \dots, v_n) \in V.$$

Дополнением (отрицанием) нечеткого множества A в V называется нечеткое множество \bar{A} с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\bar{A}}(v) = 1 - \mu_A(v), v \in V.$$

Максиминное произведение $A \circ B$ в случае конечного множества V равно максиминному произведению матриц отношений A и B , то есть

$$\mu_{A \circ B}(v, u) = \max_{v \in V} \min \{ \mu_A(v), \mu_B(u) \}.$$

Нечеткий вывод является применением максиминной композиции в качестве композиционного правила нечеткого вывода и операции взятия минимума в качестве нечеткой импликации (если используется правило типа «если, то»).

$$\mu_{B'}(u) = \max_{v \in V} \min \{ \mu_{A'}(v) \min [\mu_A(v), \mu_B(u)] \}, \quad (2)$$

где B' — нечеткое воздействие, а A' — заданное значение текущих данных наблюдений.

В процессе дефазификации на основе функции принадлежности $\mu_{B'}$ (u) для B извлекаются для каждой точки в U точные значения u для выполнения операции управления. В качестве метода дефазификации используется метод весов, основанный на переменной u , задающей максимальное значение функции принадлежности.

Обычно при реализации нечеткого регулятора используется несколько правил, структура которых может быть различной. При выполнении операций методом композиции максимум-минимум с вычислением максимального значения функции принадлежности для u результат вывода по каждому правилу получается по формуле (2). За окончательный результат выводов принимается сумма нечетких множеств — результатов вывода по каждому правилу (операция суммы или взятия максимума). Иначе говоря, правила обрабатываются параллельно.

Программное обеспечение, реализующее предложенную методику в пакете MATLAB (рис. 3), имеет следующие характеристики. Максимальное количество управляющих воздействий, то есть оцениваемых иерархий — 4. Максимальное количество входных переменных — 12. Максимальное количество ЛПУ для одной входной ЛП — 8. То есть максимальное количество ЛПУ — 384.

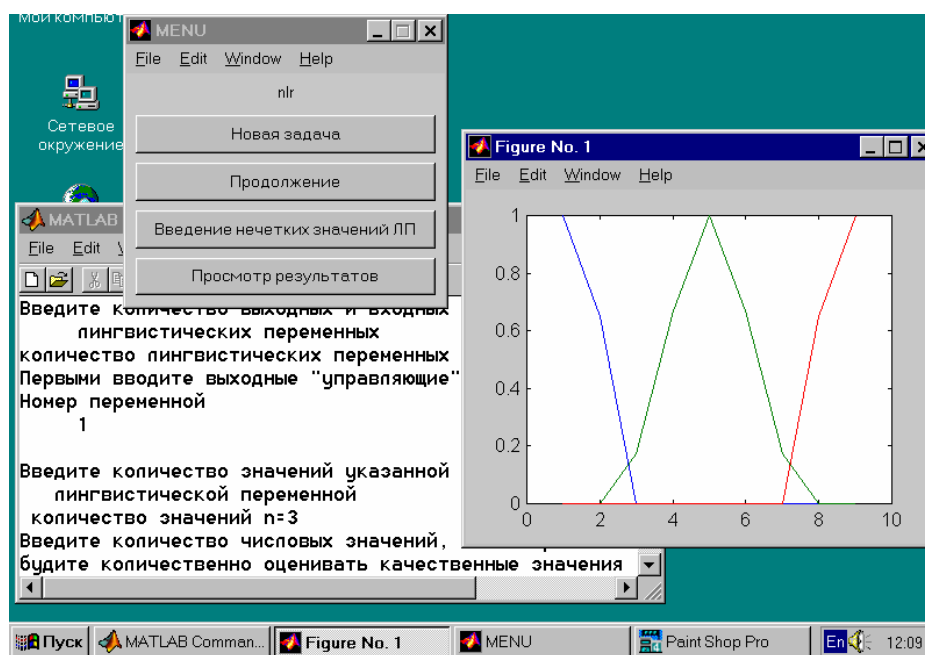


Рис. 3. Проектирование НЛР.

Сначала пользователь оценивает функции принадлежности всех качественных значений, попарно сравнивая количественные элементы по степени их соответствия качественному понятию по девятибалльной вербальной шкале. Результаты выдаются в численном и графическом виде.

Рассчитывается отношение согласованности для каждой оцениваемой функции принадлежности.

Затем оцениваются приоритеты ЛП, ЛПУ и достоверность ЛПУ.

Оценка производится также как в программном обеспечении для решения многокритериальных задач в случае рассмотрения 5-ти уровневой неполной иерархии.

4. Результаты исследований

Исследованы методы, алгоритмы и программные средства проектирования интеллектуальных регуляторов на основе нечеткой комбинированной стратегии управления и соответствующей ей подхода к генерированию нечетких правил. Комбинация ПИ и ПД алгоритмов значительно снижает количество управляющих правил без ухудшения качества регулирования. Стратегия нечеткого ПИД управления реализована в автоматической системе снижения токсичности автомобилей с дизелями на основе регенерируемых сажевых фильтров [7].

Исследованы вопросы организации обработки информации и управления на основе технологии систем, основанных на знаниях, называемой С-технологией [8]. Предложенная архитектура системы информационной поддержки принятия решений обеспечивает функционирование подсистем управления базой знаний и вывода знаний как единого целого. Она позволяет адаптировать быстро систему к различному программному обеспечению за счет модификации пользовательского интерфейса подсистемы вывода знаний. Подсистема управления базой знаний является неизменной в этом случае. Раздельная архитектура позволяет использовать и модифицировать составляющие подсистемы независимо. Механизм процедур позволяет проводить обмен данными с внешними устройствами и расширяет функциональные возможности системы.

Результаты исследований используются в учебном процессе при проведении лабораторных работ, выполнении курсовых и дипломных проектов, проведении опытно-конструкторских работ [9, 10].

5. Заключение

Мы обсудили несколько результатов для нечетких систем мониторинга и управления. Общая проблема оптимизации понимается как проблема с нечеткими выраженными критериями и альтернативами.

Разработка методологии проектирования систем управления «интеллектуальных» зданий позволит создать интеллектуальные средства обеспечения жизнедеятельности здания, базирующиеся на технологии использования знаний, что будет способствовать более эффективному решению задач по реформированию ЖКХ.

Литература

1. Пупков К. А., Коньков В. Г. Интеллектуальные системы.— М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.
2. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, расчет и приложения: Пер. с англ.— М.: Радио и связь, 1992.
3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ.— М.: Радио и связь, 1993.
4. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.— М.: Мир, 1976.
5. Грунина Г. С., Деменков Н. П., Евлампиев А. А. Решение многокритериальных задач оптимизации в условиях качественной неопределенности // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана.— 1998.— №1.
6. Деменков Н. П. Решения многокритериальных задач оптимизации и принятие решений в нечеткой постановке // Труды 111 Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям.— Санкт-Петербург, 2000.
7. Деменков Н. П., Матвеев В. А. Компьютерные технологии снижения интенсивности выделения вредных веществ энергоустановками // Экологические системы и приборы.— 2001.— №11.
8. Деменков Н. П., Матвеев В. А. Интеллектуальные информационно-управляющие системы для решения экологических задач // Конверсия в машиностроении.— 2002.— №1.
9. Деменков Н. П., Матвеев В. А. Логико-лингвистические модели в экологических задачах городского хозяйства // Промышленные АСУ и контроллеры.— 2003.— №2.
10. Деменков Н. П., Матвеев В. А. Нечеткие системы экологического мониторинга и управления // Промышленные АСУ и контроллеры.— 2004.— №1.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕТОДОМ НЕЧЕТКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Жданов И. В.

*Пермский государственный университет, Пермь,
e-mail: ivan_zhdanov@hotmail.com*

В традиционных подходах исследования существует тенденция отвергать такие термины, как неясность, неточность, неопределенность или нечеткость. Однако в реальном окружающем мире приходится сталкиваться со случаями неопределенности: учет неясности, неточность данных о событиях, характеристиках или оценках.

Эта проблема привела к появлению теории нечетких множеств. В 1965 г. ее сформулировал Л. Заде. Эта теория дала возможность решения задач, связанных с субъективностью оценки фактов неясности и нечеткости. Существенным преимуществом использования нечеткой логики является то, что при описании систем управления не обязательно делать их аналитический анализ, достаточно описать, как управляется процесс, в то время как при классическом подходе необходимо аналитическое описание модели и систем управления.

Отметим два вида неточности: нечеткость восприятия (т. е. неясность, связанная с неточностью оценки факта) и нечеткость значения (т. е. насколько, в какой мере тот или иной факт важен и его влияние существенно). Стоит уточнить, что нечеткая логика базируется на понятии нечетких множеств. Рассмотрим универсальное множество U , оно может представлять собой множество объектов, математических конструкций, значений. Если взять множество A , являющееся подмножеством U , с элементами u_1, u_2, \dots, u_n

$$A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

тогда нечетким множеством будет называться множество упорядоченных пар вида:

$$A = \{u_i, \mu_A(u_i)\} \quad u_i \in U, i=1 \dots n,$$

где $\mu_A(u_i)$ — функция принадлежности. Функция принадлежности является аналогом меры, она показывает, на сколько точно элементы $u_i \in U$ могут быть отнесены к множеству U , т. е. степень принадлежности этих элементов.

$$\mu_A: U \rightarrow [0;1] \quad (\forall u_i \in U, \exists \mu_A(u_i) \in [0;1])$$

Для обычной, не нечеткой логики, функция принадлежности принимает только два значения: «0», если элемент однозначно не принадлежит

множеству U , и «1», если принадлежит. Значения этой функции можно интерпретировать, как некоторые лингвистические критерии: «верно», «совершенно верно», «не вполне верно» и т. д. Лингвистические критерии, которые чаще и используются в реальном мире, как правило, имеют субъективную природу, т. е. нечеткие.

Таким образом, нечеткая логика стала своеобразным «мостиком» между естественным (человеческим) языком и формальным языком цифр. Нечеткий подход вошел во многие разделы математики и вычислительной техники. Появилась возможность моделирования на ЭВМ некоторых функций, с которыми достаточно успешно справляется человек в процессе принятия управленческого решения, так как теория нечетких множеств способна описывать некоторые стороны мышления. Такой подход, по-видимому, является единственно целесообразным при моделировании сложных многокомпонентных плохо определенных систем, к которым, например, относится национальная экономика, человеческая личность, язык.

Построенные в терминах нечеткой логики модели используются для анализа с помощью нечетких алгоритмов. Нечеткие закономерности позволяют получать новые нечеткие результаты и вырабатывать решения. В отличие от классических методов решения задач при нечетком подходе ищется ответ (а чаще всего - ответы) оптимальный в смысле минимальной неточности (или максимальной принадлежности), а не минимального (максимального) значения некоторого функционала. При этом следует обратить внимание, что решения задач в нечеткой постановке и в традиционной могут и не совпадать, более того — могут существенно отличаться.

Приведем пример классической задачи распределения ресурсов. Допустим, имеется сумма ξ денежных единиц, которую следует распределить между n фирмами, приносящими доход $f_i(x)$ ($i=1 \dots n$), таким образом, чтобы прибыль Z была максимальна. Задачу можно точно решить, используя полный перебор вариантов, но она также успешно решается и методами динамического программирования. Пусть x_k — управление на k -ом шаге (в нашем случае — инвестиции в k -ую фирму), ξ_k — количество средств оставшихся после управления на k -ом шаге ($\xi_k = \xi_{k-1} - x_k$). Запишем уравнение прибыли на k -ом шаге управления:

$$Z_k(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq \xi_{k-1}} \{f_k(x_k, \xi_{k-1})\} + Z_{k+1}(\xi_k),$$

где $f_k(x_k, \xi_{k-1})$ — прибыль от k -ой фирмы при ξ_{k-1} единиц денежных средств и x_k инвестиций; $Z_{k+1}(\xi_k)$ — прибыль от $(k+1)$ -ой ... n -ой фирм при ξ_k единиц денежных средств; $Z_k(\xi_{k-1})$ — прибыль от k -ой ... n -ой фирм при ξ_k единиц денежных средств.

Пусть $\xi=200$ денежных единиц (капитал), $n=4$, x_k — кратно 40 ед.

Функции прибыли фирм представлены в табл. 1.

Таблица 1.

$x \backslash f_i$	f_1	F_2	F_3	f_4
0	0	0	0	0
40	8	6	3	4
80	10	9	4	6
120	11	11	7	8
160	12	13	11	13
200	18	15	18	16

Решая задачу методом динамического программирования, получаем ответ: максимальная прибыль $Z_{\max}=24$ денежных единиц, распределяя ресурсы следующим образом, показанным в табл. 2.

Таблица 2.

$f_i \backslash x$	f_1	f_2	f_3	f_4
	40	80	40	40

Теперь рассмотрим ту же задачу, в нечеткой постановке. Допустим, имеется сумма ξ денежных единиц, которую следует распределить между n фирмами, приносящими доход $f_i(x)/\mu_A(f_i(x))$, где $\mu_A(f_i(x))$ — точность оценки предполагаемой прибыли для i -ой фирмы от x единиц вложенных средств, таким образом, чтобы прибыль Z была максимальна. Задачу в данной постановке также будем решать методом динамического программирования, нечеткого динамического программирования. Пусть x_k — управление на k -том шаге (в нашем случае — инвестиции в k -ую фирму), ξ_k — количество средств оставшихся после управления на k — том шаге ($\xi_k = \xi_{k-1} - x_k$). В качестве критерия оптимальности выберем показатель наибольшей точности ответа, который имеет вид схемы «max-min»:

$$\mu_{G^k}(\xi_{k-1}) = \max_{0 \leq x_k \leq \xi_{k-1}} \{ \mu_A(f_k(x_k, \xi_{k-1})) \wedge \mu_{G^{k+1}}(\xi_k) \},$$

где $\mu_A(f_k(x_k, \xi_{k-1}))$ — точность прибыли от k -ой фирмы при ξ_{k-1} единиц денежных средств и x_k инвестиций; $\mu_{G^{k+1}}(\xi_k)$ — точность прибыли от $(k+1)$ -ой ... n -ой фирм при ξ_k единиц денежных средств; $\mu_{G^k}(\xi_{k-1})$ — точность прибыли от k -ой ... n -ой фирм при ξ_{k-1} единиц денежных средств.

Пусть $\xi=200$ денежных единиц (капитал), $n=4$, x_k — кратно 40 ед.

Функции прибыли фирм представлены в табл. 3:

Таблица 3.

$x \backslash f_i$	f_1	f_2	F_3	f_4
0	0/1	0/1	0/1	0/1
40	8/0.9	6/0.8	3/0.95	4/0.7
80	10/0.8	9/0.9	4/0.8	6/0.95
120	11/0.95	11/0.8	7/0.9	8/0.8
160	12/0.7	13/0.95	11/0.8	13/0.9
200	18/0.8	15/0.7	18/0.95	16/0.8

Решая задачу методом нечеткого динамического программирования, получаем три ответа с одинаковой точностью 0.95, распределяя ресурсы следующим образом, представленным в табл. 4:

Таблица 4.

$Z \backslash f_i$	f_1	f_2	f_3	f_4
18	0	0	200	0
17	0	160	40	0
17	120	0	0	80

Как видно, ответы в поставленных задачах далеко не похожи. Приведенный пример хорошо иллюстрирует преимущества нечеткого подхода: мы получили не один ответ, а несколько. То есть, если моделируется система поддержки принятия решения, то у лица, принимающего решения есть выбор, так как существует несколько альтернатив. Более того, можно получить еще больше ответов, но с гораздо меньшей точностью. Например, ответ, полученный в классическом решении, имеет точность, равную

$$\mu_D = 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.95 \wedge 0.7 = 0.7.$$

Решение приведенных выше модельных задач осуществлялось вручную, что не составило особого труда, так как задачи небольшие по размерности и простые как по постановке, так и по алгоритму решения. К сожалению, такие нетрудоемкие задачи попадаются крайне редко. Приходится привлекать для решения более сложных задач ЭВМ и соответствующее программное обеспечение, такое как MATLAB. Данный пакет явился очень удобным для решения задач в нечеткой постановке, так как имеет встроенные функции для работы с нечеткими множествами.

УДК 531.36

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Квитко А. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
e-mail: Alexander.Kvitko@pobox.spbu.ru

Предложен алгоритм построения импульсной управляющей функции, при которой решение нелинейной управляемой системы переходит из начального состояния в произвольную окрестность заданного конечного состояния. Предложен критерий выбора конечных состояний и шага дискретности, гарантирующий существование решения поставленной задачи с учетом ограничений на управление и фазовые координаты.

1. Введение

Объектом исследования является система

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} x &= (x^1, \dots, x^n)^*, \quad x \in R^n; \\ u &= (u^1, \dots, u^r)^*, \quad u \in R^r, \quad r \leq n, \quad t \in [0, 1]; \\ f &\in C^3(R^n \times R^r \times R^1; R^n), \quad f = (f^1, \dots, f^n)^* \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\|x\| < C_1, \quad \|u\| < C_2. \quad (1.3)$$

Рассмотрим разбиение интервала $[0, 1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} = 1$. Функцию $u(t) \equiv u_k \forall t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, m-1$, где u_k принадлежит области (1.3), будем называть импульсной управляющей функцией.

Пусть заданы состояния

$$x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(1) = x_1; \quad x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^1)^*; \quad \|x_1\| < C_1. \quad (1.4)$$

Задача. Найти импульсное управление $u(t)$, заданное на некотором разбиении интервала $[0, 1]$ и удовлетворяющее условию (1.4) так, чтобы для решения системы (1.1) $x(t)$ были выполнены условия

$$x(0) = 0, \quad \|x(t^1) - x_1\| \leq \varepsilon_1; \quad t^1 \in [t_{m-1}, 1], \quad |t^1 - 1| \leq \varepsilon_2 \quad (1.5)$$

В (1.5) t^1 — заранее неизвестный момент времени; $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ — произвольные фиксированные числа.

2. Решение задачи

Выберем $u_1 \in R^r$; $u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^r)^*$, $\|u_1\| < C_2$. Используя свойства (1.2), систему (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_1, u_1, 1)(x^j - x_1^j) + \\ &\sum_{j=1}^r \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(x_1, u_1, 1)(u^j - u_1^j) + R_1^i(x, u, t) + R_2^i(x, u, t), i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} R_1^i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t})(x^j - x_1^j); \\ R_2^i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial u^k}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t})(u^k - u_1^k)(u^k - u_1^k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial u^j}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t})(x^k - x_1^k)(u^j - u_1^j) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial t}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t})(x^j - x_1^j)(t - 1) + \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^j \partial t}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{t})(t - 1)(u^j - u_1^j) + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^i}{\partial t \partial t}(\tilde{x}, \tilde{u}, t)(t - 1)^2 + \frac{\partial f^i}{\partial t}(x_1, u_1, 1)(t - 1) + f^i(x_1, u_1, 1) \\ &\tilde{x} = x_1 + \theta_i(x - x_1), \tilde{u} = u_1 + \theta_i(u - u_1), \tilde{t} = 1 + \theta_i(t - 1); \\ &\theta_i \in (0, 1), i = 1, \dots, n; \quad \|\tilde{x}\| < C_1, \|\tilde{u}\| < C_2, \tilde{t} < 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$x^i(t) = a^i(t) + x_1^i, i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$u^j(t) = b^j(t) + u_1^j, j = 1, \dots, r. \quad (2.5)$$

После подстановки соотношений (2.4), (2.5) в систему (2.2) получим систему, которую запишем в векторном виде

$$\dot{a} = Pa + Qb + R_1(a, b, t) + R_2(a, b, t), \quad (2.6)$$

$$P = \{P_j^i\}, P_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_1, u_1, 1), i, j = 1, \dots, n;$$

$$Q = \{q_j^i\}, q_j^i = \frac{\partial f^i}{\partial u^j}(x_1, u_1, 1), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r;$$

$$R_1 = (R_1^1, \dots, R_1^n)^*, \quad R_2 = (R_2^1, \dots, R_2^n)^*, \quad a = (a^1, \dots, a^n)^*, \quad b = (b^1, \dots, b^r)^*.$$

Условия (1.3), (1.4), (2.4), дают

$$\|a(t) + x_1\| < C_1, \quad \|b(t) + u_1\| < C_2, \quad t \in [0, 1]; \quad (2.7)$$

$$a(0) = -x_1, \quad b(0) = -u_1. \quad (2.8)$$

Сделаем преобразование переменной t по формуле

$$1 - t = e^{-\alpha\tau}; \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (2.9)$$

где $\alpha > 0$, подлежит определению. Тогда система (2.6) и условие (2.7), (2.8) примут вид

$$\frac{dc}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} Pc + \alpha e^{-\alpha\tau} Qd + \alpha R_1(c, d, \tau) e^{-\alpha\tau} + \alpha R_2(c, d, \tau) e^{-\alpha\tau}; \quad (2.10)$$

$$c(\tau) = a(t(\tau)), \quad d(\tau) = b(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty); \quad (2.11)$$

$$c(0) = -x_1, \quad d(0) = -u_1, \quad (2.12)$$

$$\|c(\tau) + x_1\| < C_1, \quad \|d(\tau) + u_1\| < C_2. \quad (2.13)$$

Введем новую управляющую функцию $v(\tau)$, связанную с $d(\tau)$ уравнением

$$\frac{dd(\tau)}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} v, \quad v = (v^1, \dots, v^r)^*, v \in R^r \quad (2.14)$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{P}\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{Q}v + \alpha \bar{R}_1(\bar{c}, \tau) e^{-\alpha\tau} + \alpha \bar{R}_2(\bar{c}, \tau) e^{-\alpha\tau}, \quad (2.15)$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ O_1 & O_2 \end{pmatrix}_{n+r \times n+r}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} O_3 \\ E_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = (c, d)^*$$

где $O_i, i=1,2,3$ — матрицы с нулевыми элементами соответственно размерностей $[r \times n], [r \times r], [n \times r]$, $E_{r \times r}$ — единичная матрица размерности $[r \times r]$, $\bar{R}_1 = (R_1^*, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^*$; $\bar{R}_2 = (R_2^*, 0, \dots, 0)_{n+r \times 1}^*$.

Система (2.15) получена в результате присоединения системы (2.14) к системе (2.10). Ограничения (2.13) будут выполнены при

$$\|\bar{c} - \bar{c}(0)\| < C_3, \quad C_3 = \min(C_1, C_2) \quad (2.16)$$

Наряду с (2.15) рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{P}\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{Q}v. \quad (2.17)$$

Будем искать непрерывную функцию $v(\tau)$ так, чтобы обеспечить экспоненциальную устойчивость системе (2.17). Пусть $\bar{q}_i, i=1, \dots, r$ — i -ый столбец матрицы \bar{Q} . Построим матрицу

$$\bar{S} = \{\bar{q}_1, \dots, \bar{P}^{k_1-1} \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r, \dots, \bar{P}^{k_r-1} \bar{q}_r\}. \quad (2.18)$$

Здесь $k_i, i=1, \dots, r$ — максимальное количество столбцов вида $\bar{q}_i, \bar{P}\bar{q}_i, \dots, \bar{P}^{k_i-1} \bar{q}_i, i=1, \dots, r$ таких, что векторы $\bar{q}_1, \bar{P}\bar{q}_1, \dots, \bar{P}^{k_1-1} \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r, \dots, \bar{P}^{k_r-1} \bar{q}_r$ линейно независимы.

Если ранг матрицы (2.18) равен $n+r$, то преобразование

$$\bar{c} = \bar{S}y \quad (2.19)$$

Согласно [3] матрицы $\bar{S}^{-1}\bar{P}\bar{S}$ и $\bar{S}^{-1}\bar{Q}$ имеют вид

где единица стоит на i -м месте,

В (2.21) $g_{k_1}^j, j=0, \dots, k_1-1, \dots, g_{k_i}^j, j=0, \dots, k_i-1$ являются коэффициентами разложения вектора $\bar{P}^{k_i} \bar{q}_i$ по векторам

$$\bar{P}^j q_1; j = 0, \dots, k_1 - 1, \dots, \bar{P}^j \bar{q}_i; j = 0, \dots, k_i - 1$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы вида

$$y_{k_i} = (y_{k_i}^1, \dots, y_{k_i}^{k_i})_{k_i \times 1}^*; \bar{e}_i^{k_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)_{k_i \times 1}^*,$$

где единица стоит на i -м месте,

$$\bar{g}_{k_i} = (-g_{k_i}^0, \dots, g_{k_i}^{k_i-1})_{k_i \times 1}^*; v = (v^1, \dots, v^r)^*.$$

Система (2.21) в скалярной форме запишется так:

$$\frac{y_{k_i}^{k_{i-1}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i-2} - \alpha g_{k_i}^{k_i-2} e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i},$$

$$\frac{dy_{k_i}^{k_i}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i} - \alpha g_{k_i}^{k_i-1} e^{-\alpha\tau} y_{k_i}^{k_i}.$$

975

$$\begin{aligned}
y_{k_i}^{k_i} &= \alpha^{k_i} \varphi \\
y_{k_i}^{k_i-1} &= \alpha^{k_i-1} e^{-\alpha\tau} \varphi^{(1)} + g_{k_i}^{k_i-1} \alpha^{k_i} \varphi \\
y_{k_i}^{k_i-2} &= \alpha^{k_i-2} e^{2\alpha\tau} + (\alpha^{k_i-1} e^{2\alpha\tau} + \alpha^{k_i-1} e^{\alpha\tau} g_{k_i}^{k_i-1}) \varphi^{(1)} + g_{k_i}^{k_i-2} \alpha^{k_i} \varphi, \\
&\dots\dots\dots \\
y_{k_i}^1 &= \alpha e^{(k_i-1)\alpha\tau} \varphi^{(k_i-1)} + \tau_{k_i-2}(\tau) \varphi^{(k_i-2)} + \dots + \tau_1(\tau) \varphi^{(1)} + \alpha^{k_i} g_{k_i}^1 \varphi.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Если продифференцировать последнее равенство (2.23), то из первого уравнения системы (2.22) получим

$$\varphi^{(k_i)} + \varepsilon_{k_i-1}(\tau) \varphi^{(k_i-1)} + \dots + \varepsilon_0(\tau) \varphi = e^{-k_i\alpha\tau} v^i; \quad i=1, \dots, r. \tag{2.25}$$

В (2.24) $r_{k_i-2}(\tau), \dots, r_1(\tau)$ являются линейными комбинациями экспонент с показателями не больше $(k_i-1)\alpha\tau$. В (2.25) $\varepsilon_{k_i-1}(\tau), \dots, \varepsilon_0(\tau)$ — линейные комбинации экспонент с показателями не больше нуля. Пусть

$$\bar{v}^i = e^{-\alpha k_i \tau} v^i, \quad i=1, \dots, r. \tag{2.26}$$

Положим

$$\bar{v}^i = \sum_{j=1}^{k_i} (\varepsilon_{k_i-j}(\tau) - v_{k_i-j}) \varphi^{(k_i-j)}; \quad i=1, \dots, r, \tag{2.27}$$

где $v_{k_i-j}; j=1, \dots, k_i$ выбраны так, чтобы корни уравнения

$$\lambda^{k_i} + v_{k_i-1} \lambda^{k_i-1} + \dots + v_0 = 0; \quad i=1, \dots, r,$$

$\lambda_{k_i}^1, \dots, \lambda_{k_i}^{k_i}$ удовлетворяли системе

$$\begin{aligned}
\lambda_{k_i}^i &\neq \lambda_{k_i}^j, \quad i \neq j, \quad \lambda_{k_i}^j < -(2k_i+1)\alpha - 1, \\
j &= 1, \dots, k_i, \quad i=1, \dots, r.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Используя (2.19), (2.23), (2.26), (2.27), получим

$$v^i = e^{k_i\alpha\tau} \delta_{k_i} T_{k_i}^{-1} \bar{S}_{k_i}^{-1} \bar{c}; \quad i=1, \dots, r, \tag{2.29}$$

где $\delta_{k_i} = (\varepsilon_{k_i-1}(\tau) - v_{k_i-1}, \dots, \varepsilon_0(\tau) - v_0)$, T_{k_i} — матрица равенства (2.24), т. е. $y_{k_i} = T_{k_i} \bar{\psi}$; $\bar{\psi} = (\varphi^{(k_i-1)}, \dots, \varphi)^*$; $S_{k_i}^{-1}$ — матрица, состоящая из соответствующих k_i -строк матрицы S^{-1} . Если подставить (2.29) в правую часть системы (2.17), то для ее решения $\bar{c}(\tau)$ с начальными данными

$$\bar{c}_0 = \bar{c}(0) = (-x_1, -u_1)^* \tag{2.30}$$

имеет место оценка

$$\|\bar{c}(\tau)\| \leq M_0 \|\bar{c}_0\| e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 1. \tag{2.31}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} P c + \alpha e^{-\alpha\tau} Q \bar{d} + \alpha e^{\alpha\tau} \bar{R}_1(c, d, \tau) C + \alpha e^{-\alpha\tau} R_2(c, d, \tau), \\
\frac{dd(\tau)}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} v,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

где $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^r)^*$; ν^i — определены формулой (2.29).

$$\bar{d}(\tau) = d(kh) \quad \tau \in [kh, (k+1)h), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.33)$$

В (2.33) $h > 0$ постоянная величина. Систему (2.32) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = A(\tau)\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} Q_1 \bar{c}(\tau) + \alpha e^{-\alpha\tau} g_1(\bar{c}, \bar{d}, \tau) + \alpha e^{-\alpha\tau} q_2(\bar{c}, \bar{d}, \tau). \quad (2.34)$$

Здесь $\bar{c}(\tau) = (\bar{c}(\tau), \bar{d}(\tau))^*$; $\bar{c}(\tau) = c(kh)$; $\tau \in [kh, (k+1)h)$, $k = 0, 1, \dots$,

$$A(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{P} + \alpha e^{-\alpha\tau} Q e^{k\alpha\tau} \delta_k T_k^{-1} S_k^{-1};$$

$$e^{k\alpha\tau} \delta_k T_k^{-1} S_k^{-1} = (e^{k_1\alpha\tau} \delta_{k_1} T_{k_1}^{-1} S_{k_1}^{-1}, \dots, e^{k_r\alpha\tau} \delta_{k_r} T_{k_r}^{-1} S_{k_r}^{-1})^*;$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} O_1 & Q \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}_{[n+r \times n+r]}.$$

$O_i, i = 1, 2, 3$ нулевые матрицы соответственно размерностей $[n \times n], [r \times n], [r \times r]$

$$g_1(c, \bar{d}, \tau) = \bar{R}_1(c, \bar{d}, \tau),$$

$$g_2(c, \bar{d}, \tau) = \bar{R}_2(c, \bar{d}, \tau) - Q_1 \bar{c}$$

Введем в рассмотрение системы

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = A(\tau)\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} Q_1 \bar{c}(\tau) + \alpha e^{-\alpha\tau} g_1(c, \bar{d}, \tau), \quad (2.35)$$

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = A(\tau)\bar{c} + \alpha e^{-\alpha\tau} Q_1 \bar{c}(\tau), \quad (2.36)$$

$$\frac{d\bar{c}}{d\tau} = A(\tau)\bar{c}. \quad (2.37)$$

Покажем, что система (2.35) $\forall h \in [0, h_0]$, где $h_0 > 0$ достаточно малое число, экспоненциально устойчива. Из экспоненциальной устойчивости системы (2.37) [1] следует существование положительно определенной функции $V(c, \tau)$ такой, что

$$\nu_1(\alpha) \|\bar{c}\|^2 \leq V(\bar{c}, \tau) \leq \nu_2(\alpha) \|\bar{c}\|^2,$$

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(2.37)} = -\|\bar{c}\|^2, \quad (2.38)$$

$$\|grad V_{\bar{c}}\| \leq \nu_3(\alpha) \|\bar{c}\|.$$

Здесь $\nu_i(\alpha) > 0$, известные константы.

С другой стороны,

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(2.36)} \leq -\|\bar{c}\|^2 - \alpha e^{-\alpha\tau} ((grad V_{\bar{c}})^*, Q_1 z(\tau)) \quad (2.39)$$

где

$$z(\tau) = \bar{c}(\tau) - \bar{c}(rh) = \bar{c}(\tau) - \bar{c}_k; \quad z(kh) = 0; \quad (2.40)$$

$$\bar{c}(kh) = \bar{c}_k. \quad (2.41)$$

Пусть $\Phi(\tau), \Phi(0) = E$ — фундаментальная матрица системы (2.37).
На основании (2.28), (2.31)

$$\|\Phi(\tau)\| \leq Ke^{-\beta\tau}, \|\Phi(\tau)\| \leq K_1 e^{-\beta\tau} \quad (2.42)$$

Решение (2.36) с начальными данными (2.41), принадлежащими области (2.16) имеет вид

$$\bar{c}(\tau) = \Phi(\tau)\Phi^{-1}(kh)\bar{c}_k + \alpha \int_{kh}^{\tau} \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)e^{-\alpha t} Q_1 dt \bar{c}_k, \quad \tau \in [kh, (k+1)h]. \quad (2.43)$$

Отсюда

$$\bar{c}(\tau) - \bar{c}_k = (\Phi(\tau)\Phi^{-1}(kh) - E) + \alpha \int_{kh}^{\tau} \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)Q_1 dt \bar{c}_k, \quad \tau \in [kh, (k+1)h]. \quad (2.44)$$

Используя теорему о среднем, запишем (2.44) в форме

$$\begin{aligned} \bar{c}(\tau) - \bar{c}_k &= (\dot{\Phi}(\theta)\Phi^{-1}(kh)h + \alpha \int_{kh}^{\tau} \Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)e^{-\alpha t} Q_1 dt) \bar{c}_k \\ \tau &\in [kh, (k+1)h], \theta \in [kh, (k+1)h]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Согласно (2.40), (2.42) имеем

$$\|z\| \leq L_3 h \bar{c}_k; L_3 = L_1 + L_2; \tau \in [kh, (k+1)h]. \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \max_{\theta \in [kh, (k+1)h]} \|\dot{\Phi}(\theta)\| \|\Phi^{-1}(kh)\|, \\ L_2 &= \max_{\tau \in [kh, (k+1)h]} \alpha \|\dot{\Phi}(\tau)\| \|\Phi^{-1}(t)Q_1\|. \end{aligned}$$

Константы L_1, L_2 не зависят от k . С другой стороны из (2.40) следует

$$\|\bar{c}_k\| \leq \|z(\tau)\| + \|\bar{c}(\tau)\|. \quad (2.47)$$

После подстановки (2.47) в (2.46) получим

$$\|z(\tau)\| \leq \frac{L_3 h}{1 - L_3 h} \|\bar{c}(\tau)\|; \tau \in [kh, (k+1)h] \quad (2.48)$$

В свою очередь оценки (2.38), (2.39), (2.48) дают неравенства

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(2.36)} = - \left(1 - \frac{\alpha v_3(\alpha) L_4 h}{1 - L_3 h} \right) \|\bar{c}(\tau)\|^2, L_4 = \|Q_1\| L_3. \quad (2.49)$$

Выражение в круглых скобках правой части (2.49) будет положительно, если

$$0 < \gamma(\alpha, h) = \frac{\alpha v_3(\alpha) L_4 h}{1 - L_3 h} < 1. \quad (2.50)$$

Оценим производную $V(\bar{c}, \tau)$ в силу системы (2.35) в области (2.16). На основании (1.3), (2.2), (2.3), (2.13) существуют константы $\gamma_0 > 0, \gamma_2 > 0$ такие, что

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(2.35)} \leq -\gamma_0(\alpha, h) \|\bar{c}\|^2 + \alpha e^{-\alpha\tau} \gamma_2 \|\bar{c}\|^3, \quad (2.51)$$

$$\gamma_0(\alpha, h) = 1 - \gamma(\alpha, h).$$

Выберем $\varepsilon_3 > 0$ так, чтобы $\forall \bar{c}$:

$$\|\bar{c}\| > \varepsilon_3 \quad (2.52)$$

было выполнено

$$-\gamma_0(\alpha, h) + \alpha \gamma_2 \|\bar{c}\| < 0. \quad (2.53)$$

Пусть $\|\bar{c}\|, h > 0$ удовлетворяют условиям (2.50), (2.52), (2.53), тогда

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(2.35)} \leq -\gamma_3 \|\bar{c}\|^2, \gamma_3 > 0, \gamma_3 = \gamma_0(\alpha, h) - \alpha \gamma_2 \|\varepsilon_3\|. \quad (2.54)$$

Ограничим область изменения $\|\bar{c}\|$ неравенством

$$\|\bar{c}\| < \varepsilon_4, \quad \varepsilon_4 = \min(\varepsilon_3, C_3 - \|\bar{c}_0\|). \quad (2.55)$$

Из изложенного выше следует, что при выбранных $\varepsilon_4, h > 0$ согласно (2.50), (2.54), для всех $\|\bar{c}\|$, принадлежащих области (2.55), имеет место неравенство (2.54).

Зафиксируем числа λ, δ :

$$\lambda = v_1 \|\varepsilon_4\|^2; \quad \delta < \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \|\varepsilon_4\|. \quad (2.56)$$

Очевидно, что

$$V(c, \tau) < \lambda \forall \bar{c} : \|\bar{c}\| < \delta. \quad (2.57)$$

Условия (1.2) гарантируют выполнение в области (2.55) неравенства

$$\|g_2(c, \bar{d}, \tau)\| \leq T_1, \quad (2.58)$$

где $T_1 > 0$ — постоянная величина.

Используя (2.38), (2.54), (2.58), найдем $T > 0$ так, чтобы

$$\left. \frac{dV}{d\tau} \right|_{(2.34)} \leq -\gamma_3 \|\bar{c}\|^2 + \alpha e^{-\alpha\tau} T_1 v_3 \|\bar{c}\| < 0, \quad (2.59)$$

$$\forall \bar{c}, \tau : \delta \leq \varepsilon_4, \tau > T. \quad (2.60)$$

Решение системы (2.32), (2.34) с начальными данными (2.30) примет вид

$$\bar{c}(\tau) = \Phi(\tau) \bar{c}_0 + \int_0^\tau \alpha \Phi(\tau) \Phi^{-1}(t) e^{-\alpha t} (Q_1 \bar{c}(t) + g_1(c, \bar{d}, t) + g_2(c, \bar{d}, t)) dt. \quad (2.61)$$

Ограничим множества выбора начальных данных \bar{c}_0 неравенством

$$\left\| \Phi(T)(\bar{c}_0 + \int_0^T \Phi^{-1}(t) \alpha e^{-\alpha t} (Q_1 \bar{c}(t) + g_1(c, \bar{d}, t) + g_2(c, \bar{d}, t)) dt) \right\| \leq \delta. \quad (2.62)$$

Очевидно (2.62) имеет место $\forall \bar{c}_0$:

$$K_1(\|\bar{c}_0\| + \alpha K_2 T) < \delta, \quad (2.63)$$

где $K_1 = \|\Phi(T)\|$; $K_2 = \max_{\omega} \|\Phi^{-1}(t) \alpha e^{-\alpha t} (Q_1 \bar{c}(t) + g_1(c, \bar{d}, t) + g_2(c, \bar{d}, t))\|$,
 $\Omega = \{\bar{c}, t \mid \|\bar{c}\| \leq \varepsilon_4, t \in [0, T]\}$.

В силу (2.57), (2.59), (2.60), (2.63) траектории с начальными данными, удовлетворяющими неравенству (2.62), не покинут области (2.55). Из (2.59) следует

$$V(\bar{c}(\tau), \tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

В свою очередь (2.38) гарантируют

$$\bar{c}(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Пусть τ_1 :

$$\|c(\tau_1)\| < \varepsilon_1; \quad e^{-\alpha \tau_1} < \varepsilon_2. \quad (2.66)$$

Положим

$$m = \frac{\tau_1}{h} + 1, \quad (2.67)$$

где h — удовлетворяет условию (2.50).

Используя константы α, h, m , построим разбиение промежутка $[0, 1]$ точками $t_k, k = 0, 1, \dots, m-1$:

$$t_k = 1e^{-\alpha kh}; \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.68)$$

Если в (2.33) с помощью формулы (2.9) вернуться к исходной переменной t , то согласно выводу уравнений (2.1), (2.10), (2.15), (2.32), (2.34), правомерность которых гарантируется выполнением условий (2.63), (2.62), (2.59), (2.55), (2.54)–(2.52), (2.16), (2.13), (1.3), получим решение поставленной задачи. На основании изложенного, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть для констант C_1, C_2, α, h , векторов x_1, u_1 выполнены условия (2.63), (2.54), (2.50), а также ранг матрицы (2.18) равен $n + r$. Тогда существует решение поставленной задачи, которое сводится к решению задачи Коши для системы (2.32), замкнутой управлением (2.29) и последующему переходу к некоторой независимой переменной t , по формуле (2.9). При этом границы искомых интервалов постоянства импульсного управления $[t_r, t_{k+1}], k = 0, 1, \dots, m-2$ по формулам (2.68), (2.67).

3. Решение задачи межорбитального перелета с помощью импульсного управления.

В качестве иллюстрации предложенного метода приведем решение задачи перевода материальной точки, движущейся по круговой орбите с постоянной скоростью в центральном поле тяготения в заданную точку, лежащую в плоскости этой орбиты с помощью импульсных управлений.

Согласно [4] система управлений в отклонениях относительно указанного движения по круговой орбите имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= v_1(x^1, x^4) + u^1, \\ \dot{x}^3 &= x^4, \\ \dot{x}^4 &= v_2(x^1, x^2, x^4) + v_3(x^1)u^2,\end{aligned}$$

где $x^1 = r - r_0$; $x^2 = \dot{r}$; $x^3 = \psi - \alpha_0 t$; $x^4 = \dot{\psi} - \alpha_0$; $u^1 = a_r \dot{m}/m$; $u^2 = a_\psi \dot{m}/m$; r_0 — радиус круговой орбиты, \dot{r} — радиальная скорость; ψ — полярный угол; $\dot{\psi}$ — скорость изменения полярного угла; a_r, a_ψ — проекции вектора относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечного направления соответственно; m, \dot{m} — соответственно масса и скорость изменения массы; α_0 — угловая скорость движения по заданной круговой орбите.

$$\begin{aligned}v_1 &= -\frac{\nu}{(x^1 + r_0)^2} - (x^1 + r_0)(x^4 + \alpha_0)^2, \\ v_2 &= -2\frac{x^2(x^4 + \alpha_0)}{x^1 + r_0}, \\ v_3 &= \frac{1}{x^1 + r_0},\end{aligned}\tag{3.2}$$

где $\nu = \nu^0 M$; ν^0 — постоянная всемирного тяготения; M — масса

$$\begin{aligned}x &= (x^1, \dots, x^4)^*, \quad u = (u^1, u^2)^*, \\ x(0) &= 0, \quad \|x(t^1) - x_1\| \leq \epsilon_1, \quad |t^1 - 1| \leq \epsilon_2, \\ x_1 &= (x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4)^*.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Пусть $x_1, u_1 = (u_1^1, u_1^2)^*$ такие, что

$$x_2^1 = 0, \quad x_1^2 = 0, \quad u_1^1 = -v_1(x_1^1), \quad -\frac{v_2(x_1^1)}{v(x_1^1)} = 0.\tag{3.4}$$

Матрицы P, Q , стоящие в правой части системы (2.17) и матрица \bar{S} , а также ограничения (2.13) запишутся так

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{bmatrix}; \\
a_{21} &= \frac{\partial v_1}{\partial x^1}(x_1^1); a_{24} = \frac{\partial v_1}{\partial x^4}(x_1^1); a_{42} = \frac{\partial v_2}{\partial x^2}(x_1^1); \beta_0 = v_3(x_1^1); \\
\|x_1 + c\| &< C_1; \|u_1 + d\| < C_2 \quad \|x_1 + c\| < C_1; \|u_1 + d\| < C_2 \\
c &= (c^1, \dots, c^4)^*; d = (d^1, d^2)^* \\
\bar{S} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{42} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{42} & 0 & 0 & \beta_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Очевидно $\det \bar{S} \neq 0$ для всех x_1^1, x_1^3 . Отсюда следует стабилизируемость системы (2.17) независимо от выбора x_1^1, x_1^3 . После решения задачи стабилизации системы (2.17) найдем по формуле (2.29) функции v^1, v^2 , которые обеспечивают экспоненциальную устойчивость замкнутой ими системы (2.17) с показателем $-\lambda(\alpha) < 0, \forall \alpha \in [0, +\infty]$. Далее фиксируем $h > 0$, при котором выполнены условия (2.50). На заключительном этапе решаем задачу Коши для системы (2.32), (2.33) с начальными, удовлетворяющими условию (2.63) и переходим к исходной независимой переменной t по формуле (2.9).

4. Численное моделирование

В процессе численного моделирования интегрировалась вспомогательная система

$$\begin{aligned}
\frac{dx^1}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} x^2, \\
\frac{dx^2}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} [v_1(x^1 + x_1^1, x^4) + u^1(kh) + u_1^1], \\
\frac{dx^3}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} x^4, \\
\frac{dx^4}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} [v_2(x^1 + x_1^1, x^2, x^4) + v_2(x^1 + x_1^1)u^2(kh)],
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{du^1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} v^1,$$

$$\frac{du^2}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} v^1.$$

$u_1^1 = \frac{v}{(x_1^1 + r_0)^2} - (x_1^1 + r_0)\alpha_0^2$; $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0^4}}$; $x_1^1 = 100$ м, $r_0 = 7 \cdot 10^6$ м, $x_1^3 = \alpha_0 \cdot 10^{-6}$ рад, $y = 0,01$, $\varepsilon_1 = 0,01$, $\varepsilon_2 = 0,1$ на промежутке $[0; 12,5]$ с начальными данными $x^1(0) = -x_1^1$; $x^2(0) = 0$; $x^3(0) = -x_1^3$; $x^4(0) = 0$; $u^1(0) = -u_1^1$; $u^2(0) = 0$, замкнутую управлением

$$v^1 = \frac{e^{\alpha\tau}}{a_{42}\alpha^3} \{ [\alpha^2(\gamma_{23} + e^{2\alpha\tau})\gamma_3^1 - \alpha e^{2\alpha\tau}\gamma_2^1 + \alpha e^{2\alpha\tau}\gamma_1^1] a_{42}x^1 + \\ + (\alpha e^{\alpha\tau}\gamma_2^1 - 3\alpha^2 e^{\alpha\tau}\gamma_3^1) a_{42}x^2 + \alpha^{-1} e^{3\alpha\tau}\gamma_0^1 x^3 + a_{42}\alpha^2 \gamma_3^1 u^1 \}, \quad (4.2)$$

$$v^2 = -\frac{e^{\alpha\tau}}{\beta_0\alpha^2} \{ e^{\alpha\tau} a_{42}\gamma_0^2 x^1 - e^{\alpha\tau}\gamma_0^2 x^4 - \alpha\beta_0\gamma_1^2 u^2 \}$$

$$\gamma_{23} = a_{21} + a_{24}a_{42}, \alpha = \frac{1}{4}, \gamma_3^1 = 14, \gamma_2^1 = 71, \gamma_1^1 = 154, \gamma_0^1 = 120, \gamma_1^2 = \alpha - 4, \gamma_0^2 = -4.$$

На рис. 1 представлены графики импульсных управляющих функций $(u^1 + u_1^1)(t), u^2(t)$ и соответствующие им функции изменения фазовых координат $(x^1 + x_1^1)(t), (x^3 + x_1^3)(t), x^4(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00319.

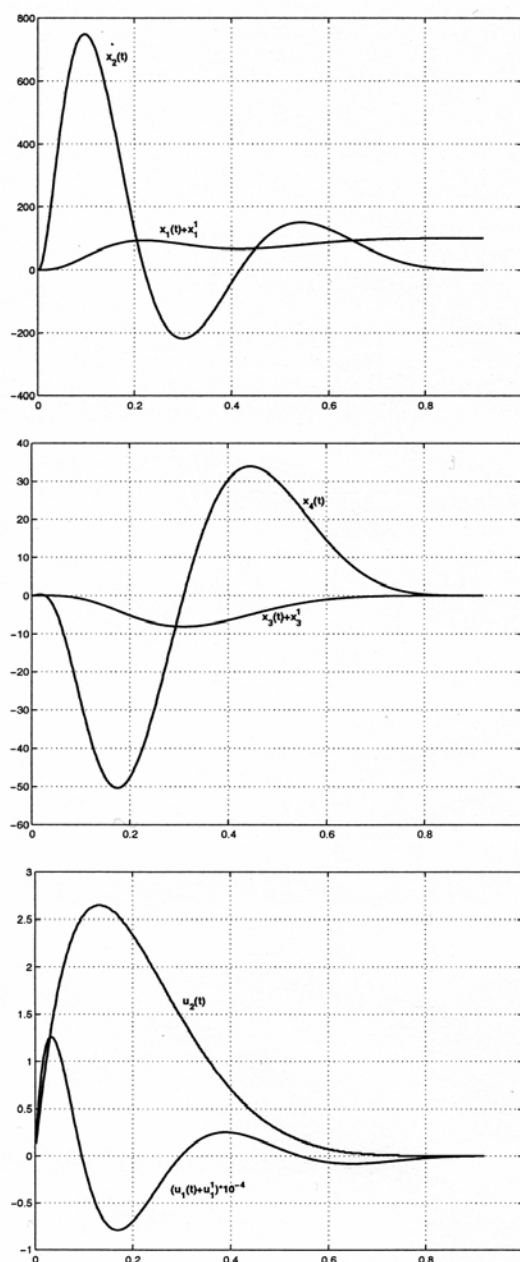


Рис.1.

Литература

1. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.— 494 с.
2. Верецагин И. Ф. Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы.— Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 1972.— 294 с.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем.— М., 1971.— 398 с.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением.— М., 1968.— 450 с.