

ТРУДЫ  
ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
«ПРОЕКТИРОВАНИЕ НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНЫХ  
ПРИЛОЖЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB»

***Часть 1. MATLAB – система  
инженерных и научных расчетов***

*Под общ. ред. В.Г. Потемкина*

## СОДЕРЖАНИЕ

ДИАГНОСТИКА МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ В СРЕДЕ MATLAB ПО ВАРИАЦИЯМ ИНТЕНСИВНОСТИ КОСМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ Белоносова О.В., Борог В.В., Симаков П.О., Куандыков Е.Б., Каримова Л.М., Ким С.А., Макаренко Н.Г. ....	17
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ИНТЕГРИРОВАННОЙ СРЕДЕ MATLAB Ботуз С.П. ....	29
АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НА ПЛАТФОРМЕ MATLAB Демидов Н.Е. ....	34
СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В СИСТЕМЕ MATLAB ДЛЯ УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТОВ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРЕКРЫВАНИЯ Дьяченко Г.Г., Петухов В.А. ....	38
МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ НА НЕВЫПУКЛЫХ И НЕСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ Камышников В.А. ....	43
КАК РИСОВАТЬ ОРГРАФЫ ПО ЗАДАННОЙ МАТРИЦЕ СМЕЖНОСТИ В MATLAB Клочкова И.Н. ....	51
ТЕСТОВОЕ СРАВНЕНИЕ РЕШАТЕЛЕЙ ОДУ СИСТЕМЫ MATLAB Козлов О.С., Скворцов Л.М. ....	53

РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATLAB АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ СЛОИ ВЕЩЕСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ОБЪЕМНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД Махотин Д.Ю., Кочкин В.Н., Цетлин В.В. ....	61
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СРЕДЕ MATLAB Осипов Ю.Р., Шашерин Д.Н. ....	68
DIRECTSD 2.0 – ПАКЕТ ДЛЯ АНАЛИЗА И ПРЯМОГО СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ Поляков К.Ю., Розенвассер Е.Н. ....	74
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РЕКУРРЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛЕЙ С ГРАНИЦАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В РАМКАХ СРЕДЫ MATLAB Сирота А.А., Лантюхов М.Н. ....	89
ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА PDE MATLAB ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРОНИКНОВЕНИИ И ОБРАТНОМ РАССЕЯНИИ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ, ПАДАЮЩИХ НА МИШЕНЬ Смоляр В.А., Еремин А.В., Харламов О.С., Давидян А.П. ....	99
ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ ТРОСА Сухоруков А.Л. ....	108
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ РОССИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ MATLAB Тарушкин В.Т., Тарушкина Л.Т., Юрков А.В. ....	130
ИССЛЕДОВАНИЕ В СРЕДЕ MATLAB ПОМЕХОЗАЩИЩЕННОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ Тимченко А.А., Снитюк В.Е., Стеценко И.В., Гресько С.А., Ланских Е.В. ....	138

ОЦЕНКА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМОЙ  
МЕЖСАМОЛЕТНОЙ НАВИГАЦИИ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ В MATLAB

Шахов Е.В., Гахович В.Д..... 146

УДК 523.165+530.1

## **ДИАГНОСТИКА МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ В СРЕДЕ MATLAB ПО ВАРИАЦИЯМ ИНТЕНСИВНОСТИ КОСМИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

Белоносова О.В.<sup>1</sup>, Борог В.В.<sup>1</sup>, Симаков П.О.<sup>1</sup>, Куандыков Е.Б.<sup>2</sup>,  
Каримова Л.М.<sup>2</sup>, Ким С.А.<sup>2</sup>, Макаренко Н.Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский инженерно-физический институт, г. Москва,

<sup>2</sup>Институт математики, г. Алма-Аты, Казахстан

e-mail: [Borog@nevod.mephi.ru](mailto:Borog@nevod.mephi.ru), [chaos@math.kz](mailto:chaos@math.kz)

Моделирование и обработка данных, продуцированных нелинейными и нестационарными процессами, предъявляет особые требования к выбору методов анализа. Традиционная спектральная техника и AR-модели предполагают [1] линейность данных, инвариантность их статистических свойств относительно сдвига и полноту. Эти требования нарушаются в большинстве практически интересных случаев. Например, измеренные геофизические данные часто демонстрируют перемежаемую нестационарную динамику, а их статистика описывается распределениями с “тяжелыми хвостами”, которые приводят к неполной автомодельности или степенным асимптотикам для наблюдаемых параметров системы [2-3]. В этой ситуации, сохранение масштабной инвариантности является наиболее общим предположением из которого следует, что полезную динамическую информацию следует искать в скейлинговых свойствах сигнала. Хорошим инструментом для этого служат методы фрактального и мультифрактального формализма, которые получили широкое распространение, например [4,5]. Масштабная инвариантность самоподобных геометрических структур [6] обобщается на самоподобные мультифрактальные меры, распределенные, например, на линии или плоскости. Эти меры – сингулярны и требуют для своего описания полного спектра обобщенных размерностей [7]. В численных экспериментах, этот спектр представляет собой бокс-размерности (емкости) фрагментов носителя, для которых интенсивность (или сингулярность) меры принимает какое-то

фиксированное значение в некотором диапазоне.

В ряде случаев отсчеты измеренного сигнала, накопленные в небольших интервалах, удобно рассматривать как меру, распределенную в таких интервалах. При этом, масштабные свойства меры, т.е. ее зависимость от величины интервала, можно связать с показателями регулярности сигнала. Таким образом, понятие регулярности является первичным для мультифрактального анализа. Поэтому рассмотрим его подробнее.

### ***Поточечный анализ регулярности функции***

В математическом анализе принято описывать регулярность (гладкость) функции показателем Липшица.

**Определение 1.** Функция  $f(t); t \in [a, b]$  имеет показатель Липшица  $H \in [0, 1]$  в точке  $t$ , если для достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестности этой точки справедливо неравенство:  $|f(t + \varepsilon) - f(t)| \leq C \varepsilon^H$ . Значение  $H = 1$  соответствует существованию, по меньшей мере, одной производной, которая равна  $C$  в пределе исчезающих  $\varepsilon$ . Значения  $H < 1$  могут иметь непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции. Например,  $H = 0.5$  для белого шума и  $0.5 < H < 1$  для красного (цветного) шума. Часто необходимо измерять гладкость функции с большей точностью, чтобы иметь возможность описания ситуации, когда функция имеет  $r$  непрерывных производных, но  $r + 1$  производная либо не существует, либо не является непрерывной функцией. Для этих целей используют следующее обобщение [8] описания регулярности.

**Определение 2.** Функция  $f(t)$  имеет поточечный (локальный) показатель Гельдера-Липшица  $\alpha \geq 0$  в точке  $t = v$ , если существует такая постоянная  $K > 0$  и такой полином  $p_v(t)$  степени  $m = [\alpha]$ , что для всех  $t, v \in [a, b]$  справедливо неравенство:  $|f(t) - p_v(t)| \leq K |t - v|^\alpha$ . Здесь величина в квадратных скобках  $[\alpha]$  означает наибольшее целое число, меньшее  $\alpha$ . Показатель  $\alpha$  для всего интервала  $[a, b]$  определяется как верхняя граница  $\sup \alpha$  показателей для всех точек из этого интервала  $[a, b]$ . Например, значение  $\alpha = 5.3$  согласно этому определению, означает, что функция имеет пять непрерывных производных, но шестая производная либо не существует, либо не является непрерывной.

В качестве полинома  $p_v(t)$  удобно использовать разложение

$f(t)$  в ряд Тейлора в окрестности  $|t-v|$ , ограниченное многочленом фиксированной степени  $k$ . Такой полином называют “струей”  $f^k(t)$  порядка  $k$  для  $f(t)$ . Задача оценки показателя  $\alpha$  сводится к тому, чтобы “стереть” все члены ряда до струи выбранного порядка. Затем следует оценить полученный остаток по графику неравенства, построенного в двойной логарифмической шкале.

Стирание легко реализовать, используя свертку  $f(t)$  с вейвлетом, имеющим  $k$  исчезающих моментов - такой вейвлет ортогонален полиному  $k$ -ой степени. Строгое обоснование этого подхода для оценки  $\alpha$  можно найти, например, в работе [9].

### **Мультифрактальный формализм. Компьютерная реализация**

Статистические свойства гельдеровских показателей исследуют методами мультифрактального анализа. Основой этого подхода служат оценки фрактальной размерности множества точек на носителе меры, выделенных фиксированным значением показателя регулярности [3,8]. Сумма отсчетов сигнала, накопленная в каждом малом интервале (боксе), полученном разбиением носителя, рассматривается как мера (или масса) содержащаяся в боксе. Удобно выбрать нормированную меру: для этого достаточно поделить каждую частичную сумму отсчетов в интервале размером  $\delta$  на сумму всех отсчетов. Будем полагать, что такая мера в боксе с номером  $i$  удовлетворяет степенному закону:  $\mu_i \propto \delta^{\alpha_i}$ , где показатели регулярности  $\alpha_i = \log \mu_i / \log \delta$  называют показателями сингулярности меры или поточечной размерностью меры. Первое из названий можно пояснить следующим примером. Пусть  $\alpha_i < 1$  в каком либо  $i$ -ом боксе. Тогда плотность меры, т.е.  $d\mu_i/dt \rightarrow \infty$ , при  $\delta \rightarrow 0$ , и следовательно – сингулярна. Второе название основано на определении емкости (или бокс-размерности) произвольного множества [3,6]. Покроем точки множества боксами размером  $\delta$  и подсчитаем минимальное число необходимых для этого боксов  $N(\delta)$ . Тогда емкостью (бокс-размерностью) множества называют такое, возможно дробное, число  $d$ , для которого предел “объема”:  $\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^d$  является конечной величиной. Очевидно, что величина  $d = -\log N(\delta)/\log \delta$ , по виду совпадает с определением величины  $\alpha_i$ . Поэтому, если нормированные дискретные значения функции  $f(t_i)$  рассматривать

как меру, то введенные выше гельдеровские показатели поточечной регулярности совпадут с  $\alpha_i$ , в пределе исчезающих  $\delta$ .

Выделим на носителе точки, в которых  $\alpha \approx \alpha_i \pm \varepsilon$ . Очевидно, что число боксов, необходимое для их покрытия, определяется соотношением:

$$N_\delta(\alpha_i) \approx \delta^{-f(\alpha_i)},$$

где  $f(\alpha_i)$  – аналог бокс-размерности упомянутого множества. Рассмотрим функцию разбиения, т.е. сумму мер, взятых по всем непустым  $\delta$ -боксам, в степени  $q$ :

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i^q &\propto \int d\alpha w(\alpha) \delta^{-f(\alpha)} \delta^{q\alpha} = \\ &= \int d\alpha w(\alpha) \exp[\log \delta (q\alpha - f(\alpha))] \end{aligned}$$

где  $w(\alpha)$ - некоторый весовой множитель, а число  $q$  служит “ручкой управления”, позволяющей просматривать вклад в функцию разбиения боксов с различной мерой. Полагая, что написанное выражение справедливо лишь в пределе исчезающих  $\delta$ , ( $\delta \rightarrow 0, \log \delta \rightarrow -\infty$ ), оценим интеграл методом перевала. Основной вклад в интеграл составляют члены с  $\alpha$ , дающие максимум показателю экспоненты, т.е.  $q = f'(\alpha), f''(\alpha) < 0$ . Поэтому:  $\sum_i \mu_i^q \approx \exp[\log \delta (q\alpha - f(\alpha))]$ . Принято, что мера мультифрактальна, если функцию разбиения можно аппроксимировать степенным законом, аналогичным такому же закону для каждого из слагаемых:  $\sum_i \mu_i^q \approx \delta^{D_q(q-1)}$ . Выбор показателя в правой части уравнения обусловлен желанием учесть условие нормировки:  $\sum_i \mu_i = 1$ . Величины  $D_q$  называют обобщенными размерностями Реньи [3,7]. Очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{dq} [D_q(1-q)] \\ f(\alpha) &= -(q-1)D_q + q\alpha \end{aligned}$$

позволяют перейти от переменных  $(q, D_q)$  к сопряженным переменным  $(\alpha, f(\alpha))$ . Последняя формула известна как преобразование Лежандра и поэтому набор бокс-размерностей  $f(\alpha)$  для разных  $\alpha$  называют лежандровским  $f_i(\alpha)$ -спектром [12]. Фактически, это преобразование сводится к нахождению разности между функцией и прямой  $y = q\alpha$ , коэффициент наклона которой

$q$ , находится из условия:  $q = f'(\alpha)$ . Преобразование Лежандра всегда приводит к выпуклой функции. Поэтому  $f_l(\alpha)$  не позволяет отследить тонкие детали в распределении сингулярностей. Однако, такие детали можно обнаружить, используя так называемый спектр больших отклонений [12-14].

Разделим носитель меры на равные интервалы (боксы)  $C_\delta$ , размером  $\delta$ . Пусть  $C = \{C_\delta\}$  - множество всех таких боксов. Определим *крупнозернистый гельдеровский показатель меры* в боксе выражением:

$$\alpha(C_\delta) = \frac{\log \mu(C_\delta)}{\log \delta}$$

Пусть  $N_\delta(\alpha, \varepsilon) = \#\{C_\delta : \alpha(C_\delta) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)\}$ , где  $\#$  - число непустых боксов, содержащих меру с показателем  $\alpha \pm \varepsilon$ . Тогда, *крупнозернистый мультифрактальный спектр больших отклонений* [12,13] определяется выражением:

$$f_g(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\alpha, \varepsilon)}{\log(1/\delta)}$$

Термин *крупнозернистый* объясняется конечной точностью оценки  $\alpha$ . Форма определения  $f_g(\alpha)$  связана с теоремой о больших отклонениях, позволяющая дать вероятностную интерпретацию спектра [12]. А именно, вероятность найти  $\alpha(C_\delta) \approx \alpha$  ведет себя приблизительно как:

$$N_\delta(\alpha, \varepsilon) / N_\delta = P_\delta[\alpha(C_\delta) \approx \alpha] \approx \delta^{d - f_g(\alpha)}$$

Здесь  $N_\delta$  - общее число боксов, содержащих меру, а  $d$  - топологическая размерность носителя. Трудности вычисления этого спектра [14] связаны с существованием двух пределов и независимостью конкретного разбиения носителя на боксы от распределения меры. Более точное значение гельдеровского показателя может быть достигнуто уменьшением размеров боксов. Использование сглаживающего ядра [15], позволяет связать скейлинг  $\alpha$  с размером  $\delta$  и избавиться от одного из пределов. Этот подход дает возможность регулировать ширину ядра сглаживания, добиваясь сходимости кривых  $f_g(\alpha)$  для определенного разрешения по  $\delta$ . Заметим, что  $f_g(\alpha) \leq f_l(\alpha)$ , поэтому лежандровский (выпуклый) спектр является огибающей для спектра больших отклонений [12,13].

Все описанные выше процедуры легко реализовать с помощью пакета FracLab [10]. Он разработан группой INRIA

(Франция) для фрактального анализа сигналов и изображений и адаптирован к среде MATLAB 5.3. Мы использовали его с пакетами MATLAB 6.0 и 6.1.

### ***Экспериментальные данные и результаты***

Высокоэнергичные протоны первичного космического излучения (энергия больше 10 ГэВ), попадая в верхнюю атмосферу Земли, рождают короткоживущие частицы пионы, которые, распадаясь практически в точке их образования, превращаются в мюоны, достигающие наземного детектора ( $p \rightarrow \pi \rightarrow \mu$ ). Наиболее эффективно генерация мюонов происходит на высотах 10-20 км, где толщина остаточной атмосферы соответствует длине взаимодействия протонов (80-100 г/см<sup>2</sup>).

Количество мюонов у поверхности Земли зависит от метеоусловий (температуры и плотности атмосферы) над пунктом регистрации частиц. При этом, интенсивность потока мюонов от времени меняется в зависимости от состояния среды в соответствии с условием [16]:

$$\frac{\Delta N}{N(t)} = \beta_p \Delta P + \beta_T \Delta T,$$

где  $\beta_p$ ,  $\beta_T$  - известные барометрический и температурный коэффициенты;  $\Delta T$ ,  $\Delta P$  - изменения температуры воздуха и полного атмосферного давления в течение какого-то небольшого интервала времени;  $\Delta N$  - изменение потока мюонов за этот же интервал времени;  $N(t)$  - начальный поток мюонов в момент времени  $t$ .

Расчет [17] показывает, что изменение потока мюонов  $\Delta N$  к барическим возмущениям  $\Delta P$  наиболее чувствительно при колебаниях плотности воздуха на высотах (10-20) км - в области генерации мюонов. Барический эффект отрицателен - увеличение плотности приводит к уменьшению числа рожденных мюонов, и наоборот - уменьшение плотности увеличивает количество мюонов.

Изменение интенсивности мюонов в зависимости от температуры  $T$  атмосферы связано с подъемом (при росте температуры) или опусканием (при уменьшении  $T$ ) высоты слоя генерации мюонов. Изменение этой высоты влияет на величину пролетной длины мюонов до наземного детектора. Если путь увеличивается, то возрастает вероятность распада мюонов. Это приводит к уменьшению их числа.

Продолжительное наблюдение за вариацией интенсивности мюонов  $N(t)$ , позволяет дистанционно проследить динамику термодинамических процессов в атмосфере во времени при

различных погодных условиях. Данные получены с помощью наземного годоскопа-томографа [18], непрерывно регистрирующего поток мюонов  $N(t)$  за отдельные 1-минутные интервалы.

При отсутствии резких возмущений в атмосфере, вплоть до стратосферных высот, интенсивность высокоэнергичных мюонов на уровне земли также, как и поведение атмосферного давления, изменяется плавно за большие (суточные) интервалы времени. Эти данные являются фоном, и в них отсутствует какие-либо значимые устойчивые динамические процессы (колебания плотности атмосферы, или турбулентность). Измеренные временные ряды  $N(t)$  в дальнейшем будут обозначаться как  $fop\_k$ , где  $k$ - номер суточного ряда экспозиции.

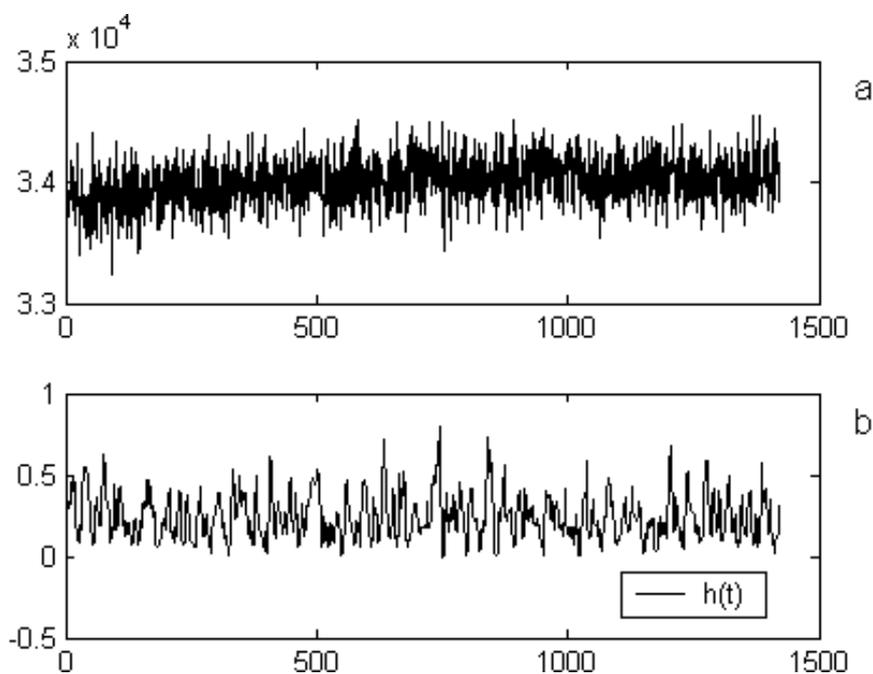


Рис. 1. Временной ряд (a) вариаций интенсивности мюонов  $N(t)$  за 1-минутные интервалы для данных  $fop\_1$  (12 марта 1998 г); b – соответствующая функция регулярности этого ряда  $h(t)$ . Ось  $x$  – время в минутах. Продолжительность измерения – сутки.

При нарушении стационарных условий (например, перемещение грозовых облаков), в атмосфере возникает волновой процесс. Происходит генерация и продольное распространение так называемых внутренних гравитационных волн (ВГВ). Колебания плотности воздуха на стратосферных высотах вызывают модуляцию потока мюонов, достигающего наземного годоскопа-томографа [19]. При этом обнаружено, что в стратосфере волны намного опережают движение “грозных ячеек”, вызывающих в наземных барографах отклик в виде кратковременных всплесков

давления - “грозовых носов”. Волновой процесс оказывается устойчивым и существует в течение нескольких часов для каждой грозовой ячейки. Возникающие ВГВ имеют характерные периоды - от нескольких до десятков минут и сильно поглощаются в направлении поверхности Земли. Поэтому приземные барографы мало чувствительны к таким явлениям. Измеренные временные ряды  $N(t)$  во время активных процессов обозначим как  $groza\_k$ , где  $k$ - номер суточного ряда экспозиции.

На рис. 1 представлен пример фонового ряда  $N(t)$  и соответствующая ему функция регулярности  $h(t)$ .

Измеренная функция регулярности обозначается как  $h(t)$ , в отличие от теоретической  $\alpha(t)$ . Данные демонстрируют значительные флуктуации и значения  $h(t) < 1$ . Для упрощения дальнейшего анализа функции  $h(t)$  можно ввести кумулятивную функцию регулярности [11], определенную для каждого отсчета  $\{t_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  временного ряда, как накопленную сумму отклонений от среднего значения:

$$h_{cum}(t_i) = -\sum_{l=1}^i (h_{cum}(t_l) - h_{mean}),$$

где в качестве  $h_{mean}$  выбирается либо среднее значение по всей генеральной совокупности локальных показателей Гельдера, либо какое-то другое фиксированное значение. Можно полагать, что ограниченные колебания кумулятивной функции вблизи определенного уровня свидетельствуют о существовании некоторой детерминированной динамики, в то время как значительные волнообразные отклонения можно интерпретировать как персистентное поведение суммы случайных величин (стохастическая динамика). С другой стороны, монотонные изменения могут служить и предиктором критических перестроек в динамических режимах системы, продуцирующей данные [11].

На рис. 2 представлены кумулятивные функции регулярности для нескольких различных временных рядов  $fon\_1$ ,  $fon\_2$  и  $groza\_1$ ,  $groza\_2$ . Ясно видимое различие в поведении соответствующих кумулятивных функций заключается в том, что для фоновых рядов основная доля ее значений лежит ниже нулевого уровня, в то время как для данных по грозе характерны почти симметричные колебания относительно этого уровня.

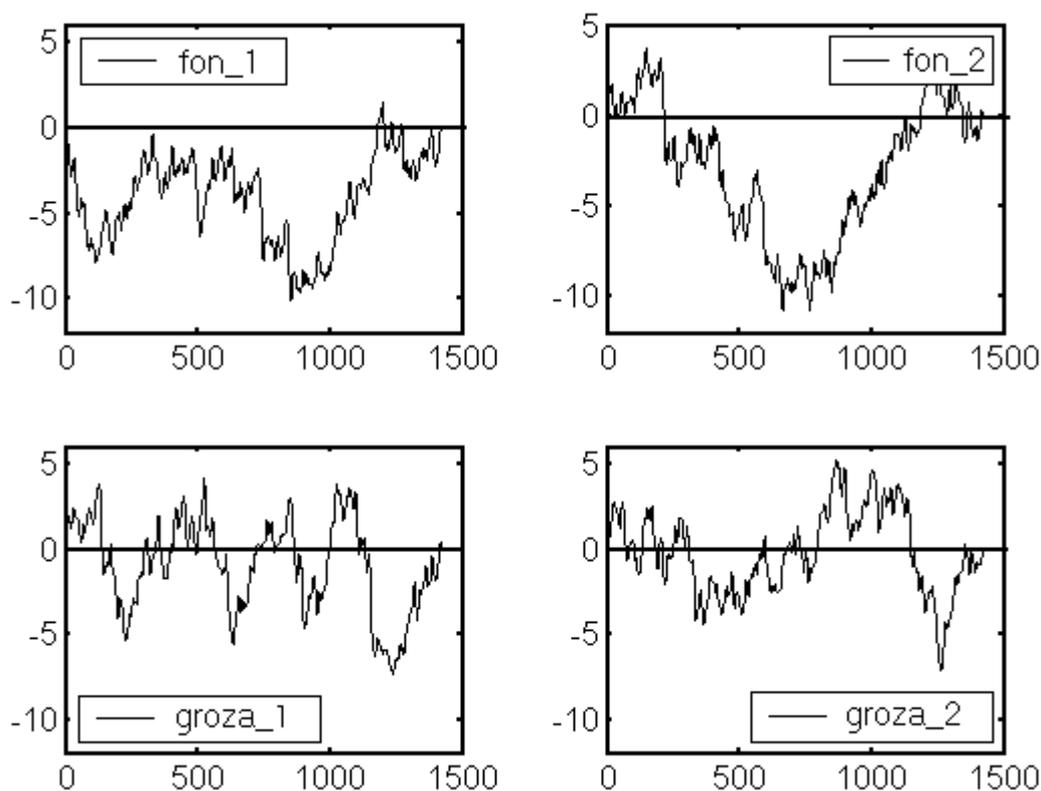


Рис. 2. Кумулятивные функции регулярности для различных временных рядов: спокойные метеоусловия - *fon\_1* (12 марта 1998 г.), *fon\_2* (25 апреля 1998 г.) и для суточного периода с грозой - *groza\_1* (15 мая 1998 г.), *groza\_2* (6 мая 1998 г.). Ось *x* – время (в минутах).

Более тонкий анализ связан с исследованием статистического поведения показателей регулярности в рамках мультифрактального формализма.

На рисунках 3-4 приведены спектры больших отклонений для данных *fon\_1* и *groza\_1*, полученные с помощью пакета FracLab. Набором сходящихся кривых на рисунках показаны спектры, рассчитанные с изменением ширины сглаживающего ядра. Видно, что результаты устойчивы к вариациям параметров сглаживания. Аналогичные спектры для данных *fon\_2* и *groza\_2* приведены на рисунках 5 и 6. На этих рисунках присутствуют те же характерные различия.

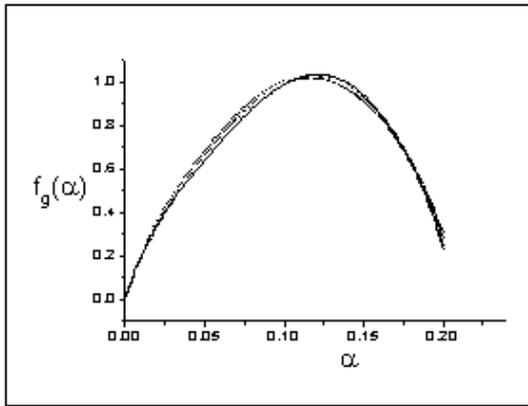


Рис. 3. Спектр больших отклонений для данных *fon\_1*. Классическая форма спектра для мультифрактальной меры.

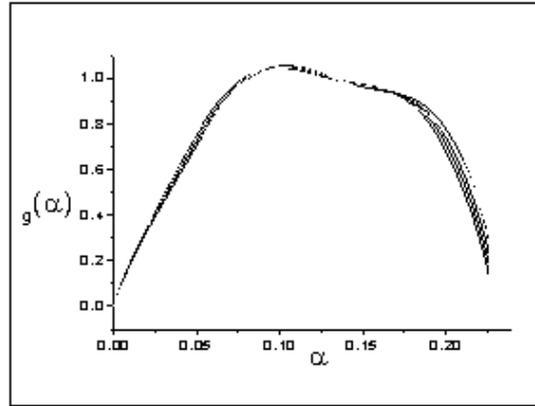


Рис. 4. Спектр больших отклонений для данных *groza\_1*. Бимодальная форма вершины указывает на присутствие двух мультифрактальных мер.

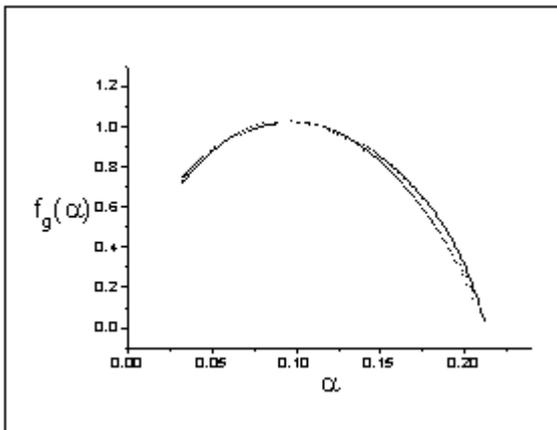


Рис. 5. Спектр больших отклонений для данных *fon\_2*. Форма похожа на спектр *fon\_1*, с менее выраженным левым крылом.

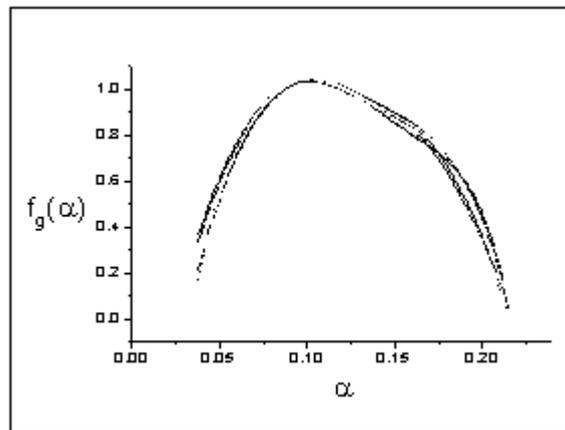


Рис. 6. Спектр больших отклонений для *groza\_2*. Наблюдаются следы бимодальности спектра.

Ясно заметна разница в формах кривых для этих двух типов данных. Двухгорбость спектра для *groza\_1* и *groza\_2* можно интерпретировать, как присутствие двух мультифрактальных мер.

### Выводы

Анализ временных рядов, продуцированных волновыми процессами в атмосфере показал:

- функция регулярности позволяет выявить изменение динамических режимов в нестационарных и нелинейных данных. Изменение регулярности, полученное с помощью

- кумулятивной функции, демонстрирует изменение динамики при приближении грозового фронта и во время грозы;
- мультифрактальный спектр демонстрирует возникновение второй самоподобной меры для данных, соответствующих периоду развития грозы. Она может индуцироваться турбулентной иерархической динамикой грозового облака или возникновением мультифрактального кластера, связанного с перестройкой электрического поля;
  - пакет FracLab может быть с успехом использован для фрактального анализа нелинейных сигналов. Следует заметить, что не все опции, включенные в пакет, работают корректно. Мы рекомендуем проводить предварительное тестирование каждой опции на модельных примерах с известными скейлинговыми характеристиками. В качестве таких примеров можно использовать хорошо известный  $\beta$ -каскад или дробное броуновское движение.

Работа выполнена на уникальной установке "Мюонный годоскоп" (рег. № 06-11, Минпромнаука РФ), а также при поддержке гранта РФФИ (№ 00-02-17062).

### *Литература*

1. *Виллемс Ян К.* От временного ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование. М.: Мир, 1989. С.8-191.
2. *Lovejoy S., Schertzer D.* Scaling, fractals, and nonlinear variability in Geophysics // EOS, Meetings reports. 1988. № 8. P.143-145.
3. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 528 с.
4. *Hough S.E.* On the use of spectral methods for the determination of fractal dimension // Geophysical research letters. Vol.16. 1989. № 7. P.673-676.
5. *Davis A., Marshak A., Wicombe W., Cahalan R.* Multifractal characterizations of intermittency in nonstationary geophysical signals and fields // Current topics in nonstationary analysis. Ed. by G. Trevino, J.Hardin, B.Douglas, and E. Andreas. World-Scientific (Singapore). 1996. P.97-158.
6. *Макаренко Н.Г.* Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое. // Лекции по нейроинформатике. Ч.2. Нейроинформатика-2002. IV Всероссийская научно-техническая конференция. М.: МИФИ, 2002. С.121-169.

7. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Schraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets // *Phys.Rev.A. Vol.33. 1968. № 2. P.1141-1151.*
8. *Levy Vehel J.* Signal enhancement based on Holder regularity analysis // URL: <http://www-rocq.inria.fr/fractals>
9. *Struzik Z.R.* Determining local singularity strengths and their spectra with wavelet transform // *Fractals. Vol. 8. 2000, № 2, P.163-179.*
10. *FracLab.* URL: <http://www-rocq.inria.fr/fractales>
11. *Struzik Z.R., van Wijngaarden W.J., Castelo R.* Reasoning from nonstationarity// URL: <http://www.cwi.nl/~zbyszek>
12. *Riedi R., Scheuring I.* Conditional and relative multifractal spectra// *Fractals, Vol.5. 1997, № 1. P.153-168.*
13. *Canus Ch., Vehel J., Tricot C.* Continuous large deviation multifractal spectrum: definition and estimation// URL: <http://www-rocq.inria.fr/fractales>
14. *Levy Vehel J.* Numerical computation of the large deviation multifractal spectrum// URL: <http://www-rocq.inria.fr/fractales>
15. *Devroye L.* The double kernel method in density estimation// *Ann.Inst.Henri Poincare. Vol.25. 1980. № 4. P.533-580.*
16. *Дорман Л.И., //Метеорологические эффекты космических лучей. М.: Наука. 1972. 210 с.*
17. *Борог В.В.* Мюонная томография и мониторинг окружающей среды // *Труды Первой Баксанской Молодежной Школы ЭТФ. Нальчик: КБГУ, 2000. С.82-95.*
18. *Борог В.В., Буринский А.Ю., Дронов В.В.,* Мюонный годоскоп для исследования солнечно-земных связей в области энергий больше 10 ГэВ // *Изв. РАН. Сер. Физ. 1995. Т.59. № 4. С.191-194.*
19. *Борог В.В., Дронов В.В.,* Изучение короткопериодических колебаний интенсивности мюонов, связанных с конвективно-грозовыми явлениями в атмосфере Земли // *Изв. РАН. Сер. Физ. 1999. Т.63. № 8. С.1675-1677.*

УДК 681.3

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ИНТЕГРИРОВАННОЙ СРЕДЕ MATLAB

Ботуз С.П.

*Федеральный институт промышленной собственности, г. Москва  
e-mail: [bsp\\_serg@pol.ru](mailto:bsp_serg@pol.ru)*

Будем рассматривать инструментальные методы и программно-аппаратные средства для формирования интуитивно понятного графо-аналитического (ГА) интерфейса, предоставляющего возможность в интегрированной среде MATLAB:

- формировать предметно-ориентированный ГА интерфейс;
- осуществлять структурную и параметрическую декомпозицию задач позиционного (программного, ситуационного и др.) управления процессами защиты и сопровождения объектов интеллектуальной собственности (ОИС) на всем их жизненном цикле в сети Internet/Intranet (далее вычислительная сеть ВС);
- формировать бинарные параметрические поля предметно-ориентированных данных на основе использования протокола PPTP (Point – to Point Tunneling Protocol);
- осуществлять интеллектуальную поддержку клиентов ADIUS (Remote Authentication Dial-In User Service);
- оценивать техническое состояние совместно используемого сетевого оборудования на основе просмотра соответствующего списка (HCL – Hardware Compatibility List);
- формировать ГА профиль лица, принимающего решение (ЛПР), обеспечивая его когнитивную идентификацию, которая начинает формироваться с момента первого его входа в систему и уточняется после каждого сеанса работы ЛПР на основе имитации и исследования основных когнитивных запросов ЛПР;
- автоматизировать процессы конфигурации ГА профиля ЛПР, которые осуществляются на основе когнитивной идентификации взаимодействий ЛПР-ОИС на всем жизненном

цикле ОИС в сети.

Далее рассмотрим некоторые теоретические основы конструирования геометрии графо-аналитических бинарных полей, у которых в качестве основного геометрического базиса использована не точка, а прямая линия. На демонстрационном слайде приведены основное и вспомогательное описания ГА базиса с использованием инструментальных средств MATLAB.

В рамках общей задачи синтеза конструктивных элементов графо-аналитических бинарных полей далее рассмотрены следующие задачи:

1. Задача синтеза ГА бинарных полей на основе использования полярной системы координат для случая нестационарного проективного базиса;
2. Задача синтеза ГА бинарных полей на основе использования дуального свойства плоскости;
3. Частные задачи синтеза координат ГА бинарного поля на основе использования полярной системы координат.

Таким образом, предоставляется возможность осуществить декомпозицию исходной задачи синтеза движения любой точки ГА бинарного поля в  $R^2$  к более простой задаче программного позиционирования точки по заданной или известной прямой, т.е. в  $R^1$ .

В результате исследованы и сформулированы конструктивные определения и некоторые топологические свойства графо-аналитических полей позволившие доказать

*Утверждение.* Топология графо-аналитического бинарного поля не зависит от выбора системы координатного базиса.

Этот результат обеспечен за счет того, что введенные в [16] и см. §1.3 в [14] ГА парадигмы (ГАП) и предлагаемые графо-аналитические бинарные поля позволяют наиболее полно использовать дуальное свойство плоскости ( $R^2$ ) конкретного устройства отображения в заданной среде (например, ЛПР-ОИС-ВС). При этом переход на основе применения графо-аналитических бинарных полей (или применения соответствующего аппарата «визуального» ГА исчисления) в пространство касательных векторов к всевозможным параметрическим кривым, проходящим через некоторую фиксированную точку  $M(x_0, y_0)$ , позволяет в сжатой форме передать большой объем сведений о локальном поведении анализируемого процесса (кривой) в данном состоянии (например, не только в некоторой фиксированной точке  $M(x_0, y_0)$ , но и в ее окрестности или на заданном отрезке  $[M(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y), M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)]$  в зависимости от предыстории

ее изменения). Это одно из основных топологических свойств графо-аналитических бинарных полей и предлагаемого аппарата ГА исчисления. Данное свойство выгодно отличает графо-аналитические бинарные поля от топологических свойств некоторого свободного вектора (например, вектора состояния исследуемой системы регулирования или управления), который характеризует только локальное поведение анализируемого процесса для фиксированного множества параметров данной исследуемой системы.

Приведенные в докладе результаты сформулированы в виде следующей теоремы "Синтеза графо-аналитических бинарных полей на плоскости".

*Теорема.* Синтез движения любой образующей точки графо-аналитического бинарного поля на плоскости (или в  $R^2$ ) можно осуществить в заданном стационарном проективном базисе на основе позиционирования одной или двух точек на любом из данных базисов.

Непосредственно из теоремы и приведенных доказательств, очевидна справедливость следующего конструктивного следствия.

*Следствие.* Для формирования координат графо-аналитического бинарного поля достаточно обеспечить программное позиционирование одной или двух точек на одной из прямых заданного стационарного проективного базиса.

В этой связи на основе применения ГАП в интегрированной среде MATLAB предоставляется возможность анализировать топологические свойства и оценки дуальности, например, в соотношениях между векторами и ковекторами [3,7], которое теряется при традиционных подходах визуализации (координатном, в пространстве состояния, в фазовом пространстве и т.п.) результатов исследования различных физико-химических и информационных процессов, происходящих в распределенных системах управления и регулирования.

### *Литература*

1. Бутковский А.Г., Бабичев А.В. Результаты и перспективы выполнения программы создания единой геометрической теории управления // Приборы и системы управления. 1996. № 12.
2. Гришин В.Г. Образный анализ экспериментальных данных. М.: Наука, 1982. 238с.
3. Елкин В.И., Павловский Ю.Н. Декомпозиция моделей управляемых процессов //Итоги науки и техн. Сер. Совр. Пробл. мат. и ее прил. Тематические обзоры. Оптимизация и

- управление-1 /ВИНИТИ. 1996. Т. 29. С. 185-238.
4. *Медведев В.С., Потемкин В.Г.* Нейронные сети. М.: Диалог - МИФИ, 2002.
  5. *Смолянинов В.В.* Пространственно-временные задачи локомоторного управления // Успехи физических наук, 2000, том 170, № 10.
  6. *Трахтенгерц Э.А.* Взаимодействие агентов в многоагентных системах // АиТ. 1998. № 7.
  7. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем.. – М.: Наука, 1988.
  8. *A'ndrews D.F.* Computational Geometry of Linear Threshold Function. – Inform. And Contr., 1977, 34.
  9. *Devoe D.B.* Human Itegration of Concurrent Audio and Visual Messages. – J. Audio Eng. Soc., 1966, July, 14.
  10. *Bradshaw J.W., Duffield S., Benoit P. et al.* KAOs: Toward an industrial – strength generic agent architecture // Software Agents. Cambridge MA: AAAI/MIT Press, 1996.
  11. *Ovseevich A.I.* Limit behavior of attainable and superattainable sets // Proc. Conf. on Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty, Sopron, Hungary, 1990, Birkhduser, Basel, p.324-333, 1991.
  12. *Dontchev A.L., Veliov V.M.* Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems// SIAM J. Control and Optimiz. V.21, №4, P. 566-581, 1983.
  13. *Funahashi K.* On the approximate realization of continuous mappings by neural networks // Neural Networks. 1989. № 2. P. 183-192.
  14. *Ботуз С.П.* Методы и модели экспертизы объектов интеллектуальной собственности в сети Internet. М.: Наука, Физматлит, (в печати).
  15. *Ботуз С.П.* Автоматизация исследования, разработки и патентования позиционных систем программного управления. М.: Наука, Физматлит, 1999.
  16. *Ботуз С.П.* Графо-аналитические парадигмы защиты объектов интеллектуальной собственности в сети Интернет //Проблемы управления безопасностью сложных систем: Материалы VIII межд. конф. Москва, ИПУ РАН /Под ред. д.т.н., проф. Кульбы В.В. М.: РГГУ, 2000
  17. *Ботуз С.П.* Графо-аналитический метод визуализации состояния распределенных вычислительных процессов и систем управления //Труды международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления" (РАСО'2001). Ч.4. Математические модели, технологии и языки параллельных вычислительных процессов. М.: ИПУ РАН, 2001.

18. Ботуз С.П. Методы графо-аналитической декомпозиции моделей экспертизы систем программного управления в сети Internet //Декомпозиционные методы в математическом моделировании. Под.ред. член-корр. РАН Ю.Н.Павловского. – М.: ВЦ РАН, 2001
19. Ботуз С.П. Автоматизированный синтез нейроподобных структур и моделей идентификации нелинейных динамических процессов в Internet //Математические методы распознавания образов (ММРО – 9)/ Под ред. акад. РАН Ю.И.Журавлева . – М.: ВЦ РАН, 1999
20. Ботуз С.П. Интерпретация процесса графического отображения многомерной числовой информации в косоугольной системе подвижно-взаимосвязанных координат //Образный анализ многомерных данных. М.: ИПУ, 1984.
21. Авт.свид. № 1679195 (СССР). Устройство для прогнозирования состояния систем управления / Ботуз С.П.1991, БИ № 35.
22. Патент № 2012034 (РФ). Способ автоматического управления и система для его осуществления/ В.Ф.Бирюков, С.П.Ботуз. 1994, БИ №8.

УДК 681.3:62-52

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ ЭКСПЕРТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ НА ПЛАТФОРМЕ MATLAB**

Демидов Н.Е.

*Тверской государственный технический университет, г. Тверь*  
*e-mail: [kaf\\_is@kst.tver.ru](mailto:kaf_is@kst.tver.ru)*

Экспертное оценивание является важнейшим средством поддержки принятия решений во многих предметных областях и особенно актуально в условиях глобализации экономики, информатизации общества и массового использования новых ИТ. Одним из современных и наиболее эффективных методов многоуровневого экспертного оценивания является метод аналитических иерархических процессов (АИП), разработанный Т. Саати [1]. Вычислительная сложность метода – нахождение собственного вектора (СВ) и максимального собственного числа (СЧ) матрицы парных сравнений (МПС), нормализация СВ и проверка согласованности МПС. Известен ряд программных систем, реализующих методологию АИП [1, с. 304], а развитые возможности современных инструментальных средств для создания приложений, имеющихся, в частности, и в составе системы для математических расчетов MATLAB, позволяют встроить поддержку методологии АИП в этот популярный пакет, занимающий лидирующее положение в качестве стандартного программного средства для высшей школы в развитых странах.

В ходе обсуждения АИП в научной литературе наряду с примерами успешного применения появляются критические замечания как к теоретическому обоснованию метода, так и по поводу его практических сложностей, к которым в первую очередь необходимо отнести необходимость полного заполнения МПС ( $n(n-1)/2$  суждений эксперта), эффект дробления цели (уменьшения весов наиболее важных целей при увеличении уровней иерархии), проблемы анализа чувствительности вариаций экспертных оценок (ЭО) и получения решений в случае интервальных ЭО.

Для решения перечисленных проблем автор [2] использовал хорошо теоретически разработанный аппарат метода наименьших квадратов (МНК) применительно к решению задачи АИП в новой формулировке вида

$$Bx = \left[ \frac{A - mE}{e} \right] x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $A$  – МПС порядка  $n$ ;  $E$  – единичная матрица;  $e$  – вектор – строка длины  $n$  ( $e_i=1, i=1,2,\dots,n$ );  $m$  – целое,  $n \leq m \leq \lambda$  ( $\lambda$  – максимальное положительное СЧ  $A$ );  $x$  – нормализованный вектор ранжирования критериев (объектов).

В приложении к книге Т. Саати [1, с. 301-302] рассмотрены два подхода к выявлению приоритетов для неполных МПС и приведено теоретическое обоснование одного из них. Для нахождения МНК - решений в случае неполной МПС предложена следующая модификация вектора - столбца правой части (1):

$$Bx = \left[ \frac{A - nE}{e} \right] x = \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$c_i = -k_i / n, \quad (3)$$

где  $k_i$  – число недополученных суждений эксперта в соответствующей строке МПС  $A$ , в которой отсутствующие суждения заменены нулевыми значениями. Соотношение (3) получено в результате исследования предельных свойств решения (2) при изменении  $k_i$  от 0 до  $n - 1$ .

Интервальные ЭО (ИЭО) позволяют учесть неполноту знаний эксперта и возникают также при групповом экспертном оценивании вследствие разброса мнений экспертов. Одной из задач в случае ИЭО является нахождение вектора ранжирования объектов, при котором система ИЭО - согласованная и решение  $x$  существует:

$$X = \left\{ x ; a_{ij}^{(L)} \leq x_i / x_j \leq a_{ij}^{(H)}, \sum_i x_i = 1, x_i > 0 \right\}.$$

Для нахождения МНК - решения рассматриваемой задачи как усредненного мнения экспертов предложена следующая модификация соотношения (1):

$$Cx = \begin{bmatrix} A_L - nE \\ A_H - nE \\ e \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения МНК - решений в групповом ЭО предлагается использование уравнение вида

$$C^T Cx = (\sum B_i^T B + e^T e)x = e^T,$$

где  $B_i = A_i - nE$  и  $A_i$  – МПС, заполненная  $i$ -м экспертом.

При создании комплекса программных средств для аналитических иерархических процессов экспертного оценивания на платформе MS Office 2000 и интрасетевой платформе Microsoft [2] и его модифицированного варианта для оценки степени удовлетворенности пользователя [3] неформальную роль имела реализация комплекса в MATLAB/DOS с режимом работы в командной строке MATLAB, используемая для проведения сравнительного исследования известных и оригинальных алгоритмов экспертного оценивания и разработки прототипов программных решений. MATLAB/DOS – версия комплекса содержит свыше 100 модулей в виде М-функций MATLAB, которые подразделены на три группы (уровня):

- базовые модули - не используют вызовов других модулей комплекса;
- модули второго уровня - предназначены для решения конкретных задач АИП в отдельных узлах иерархической структуры МПС, векторов приоритетов и оценок согласованности [1];
- модули третьего уровня – законченные функциональные приложения для решения основной задачи АИП и ее модификаций (интервальное и групповое ЭО, анализ чувствительности и др. [2]).

Листинг М – функции AHP\_LLS, предназначенной для нахождения вектора ранжирования полных и неполных МПС методом логарифмических наименьших квадратов, демонстрирует возможности и особенности использования языка программирования MATLAB/DOS:

```
function X=AHP_LLS(A)  
  [n,n]=size(A);  
  for i=1:n  
    k=0;  
    p=1;  
    for j=1:n  
      if A(i,j) ~= 0  
        p=p*A(i,j);  
        k=k+1;  
      end  
    end  
    X(i)=p^(1/k);  
  end  
  X=(X/sum(X))';
```

Возможна реализация в MATLAB/Windows ряда программных систем для поддержки методологии АИП, и в том числе: для конечных пользователей - на основе приложения Excel Link; учебного назначения - на основе приложения Notebook и системы для ИТ - специалистов - на основе пакета проектирования событийно - управляемых систем Stateflow, а с учетом реально имеющегося задела в виде методического, алгоритмического и программного обеспечения в области многоуровневого экспертного оценивания в перспективе возможна реализация специализированного программного обеспечения в виде MATLAB - тулбокса (Toolbox) Expert Estimation.

### *Литература*

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
2. *Демидов Н.Е.* Комплекс программных средств для аналитических иерархических процессов экспертного оценивания //Программные продукты и системы, 2001. № 2. С. 38 – 42.
3. *Демидов Н.Е., Чохонелидзе А.Н., Неффа В.М.* Комплекс программных средств для оценки степени удовлетворенности пользователей ресурсами сетевой экономики //КомпьюЛог, 2001. № 4. С. 12 – 14.

УДК 535.341+681.3.06

## **СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В СИСТЕМЕ MATLAB ДЛЯ УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТОВ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРЕКРЫВАНИЯ**

Дьяченко Г.Г., Петухов В.А.

*Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, г. Москва*

*e-mail: [dyatch@sci.lebedev.ru](mailto:dyatch@sci.lebedev.ru)*

Для надежной интерпретации тонкоструктурных электронно-колебательных спектров сложных молекул большое значение имеет расчет интенсивностей линий, которые получаются в результате вычисления многомерных интегралов перекрывания (ИП) колебательных волновых функций. Краткий обзор разработанных точных и приближенных методов расчета многомерных ИП для гармонических волновых функций можно найти в работе [1]. Из него следует, что расчет ИП с учетом перепутывания всех нормальных координат определенного типа симметрии вызывает значительные трудности. Наиболее математически строгий подход расчета ИП разработан в работе [2] и основан на методе производящей функции. Однако, при его численной реализации по оценке авторов работы [1] расчет 16-мерного ИП занял бы порядка 1000 дней. Главным недостатком такой реализации является попытка получения явных или рекуррентных аналитических выражений для ИП через элементы матриц, отражающих взаимосвязь нормальных координат в комбинирующих электронных состояниях, а затем подстановка численных значений матричных элементов в получившиеся громоздкие выражения. Особенностью нашего алгоритма является алгоритмическое определение вычисляемой функции, которое заключается в подстановке численных значений матричных элементов преобразования нормальных координат непосредственно в производящую функцию, а затем, с помощью символьных преобразований, - получение конкретных выражений для вычисления ИП. Реализован алгоритм для системы MATLAB 5.xx, которая выполняет численные расчеты матриц преобразования нормальных координат, а с помощью встроенного ядра Maple -

символьные преобразования производящей функции, в результате которых получаются окончательные выражения, необходимые для расчета ИП.

Для упрощения выражения, связывающего ИП с производящей функцией, полученного в работе [2], воспользуемся соотношением Душинского, отражающим связь нормальных координат в различных электронных состояниях, в виде:

$$X' = J * X + K \quad (1)$$

В этом соотношении, как и в работе [1], использованы нормированные на амплитуду нулевых колебаний нормальные координаты  $X'$  и  $X$ . Исходные выражения для ИП записываются следующим образом:

$$I(m, n) = N \int \psi_m(Q') \psi_n(Q) dQ,$$

где  $m$  и  $n$  – наборы колебательных квантовых чисел в комбинирующих электронных состояниях;  $\psi$  – волновые функции гармонических осцилляторов, а  $N$  – нормировочный множитель,  $Q'$  и  $Q$  – обычные нормальные координаты.

При введенных обозначениях связь между производящей функцией и ИП имеет вид:

$$I(0,0)P(T,U) = \sum_{m,n} T^m U^n \left( \frac{2^m 2^n}{m!n!} \right)^{1/2} I(m,n). \quad (2)$$

Здесь:

$$P(T,U) = \exp(T^T A T + T^T B + U^T C U + U^T D + U^T E T) \quad (3)$$

- производящая функция;  $T$  и  $U$  - переменные, от которых зависит производящая функция, относящиеся к квантовым числам  $m$  и  $n$ , соответственно. В формуле (3) они представлены в виде вектор-столбца:  $T^T = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ,  $U^T = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ , где  $k$  равно количеству перепутывающихся нормальных координат, входящих в ИП. Матрицы, входящие в формулу (3), выражаются через параметры соотношения Душинского (1):  $A = 2 J M J^T - I$ ;  $B = -2 J M J^T K + 2 K$ ;  $C = 2 M - I$ ;  $D = -2 M J^T K$ ;  $E = 4 M J^T$ ;  $I$  – единичная матрица,  $M = (J^T J + I)^{-1}$ . Расшифровка сокращенных выражений, входящих в уравнение (2), следующая:

$$m! = \prod_i m_i!, \quad 2^m = \prod_i 2^{m_i}, \quad T^m = \prod_i t_i^{m_i}.$$

Для расчета ИП мы воспользовались разложением производящей функции в ряд Тейлора:

$$P(T,U) = \sum_{m,n} \frac{T^m U^n}{m!n!} \frac{\partial^m \partial^n P(T,U)}{\partial T \partial U}. \quad (4)$$

Здесь сокращенно обозначено многократное дифференцирование  $m_i$  и  $n_j$  раз по соответствующим переменным  $t_i$  и  $u_j$ , частные

производные вычисляются при нулевых значениях всех  $t_i$  и  $u_j$ . Приравнявая в уравнениях (2) и (4) коэффициенты при  $T^m U^n$  с одинаковыми  $m$  и  $n$ , для расчета ИП мы получаем простое выражение:

$$\frac{I(m,n)}{I(0,0)} = \left( \frac{1}{m!n!2^m 2^n} \right)^{1/2} \frac{\partial^m \partial^n P(T,U)}{\partial T^m \partial U^n}.$$

В разработанном нами алгоритме расчета используется тот факт, что системы, реализующие символьные вычисления, позволяют произвести указанную операцию дифференцирования непосредственно на вычислительной машине. Текст программы, реализующей данный алгоритм для системы MATLAB 5.xx, приведен в приложении. Значения  $J$  и  $K$ , необходимые для расчетов, также вычислялись в системе MATLAB 5.xx и вводились в программу в численном виде. Эта программа опробована нами для расчета интенсивностей линий в электронно-колебательных спектрах многих ароматических соединений. Расчеты производились на персональном компьютере с тактовой частотой 188 МГц. Время счета 12-мерного ИП для антрацена составляло 10 с; 16-мерного ИП для 9,10-диметилантрацена - 20 с, что на 9 порядков быстрее оценки, приведенной в начале статьи; а 21-мерного ИП для бисантена - 30 с. Как видно, время счета с увеличением размерности ИП растет не очень быстро. Поэтому использование предлагаемого алгоритма расчета ИП позволяет применять его и для намного более сложных молекул.

Таким образом, совместное использование численных и символьных вычислений позволяет разрабатывать алгоритмы, выполняющие расчеты интенсивностей линий в электронно-колебательных спектрах на много порядков быстрее, чем использовавшиеся до сих пор, причем без потери точности.

Авторы выражают глубокую благодарность академику Н. А. Борисевичу за поддержку данной работы и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 00-02-16419.

### Литература

1. Грибов Л.А., Баранов В.И., Зеленцов Д.Ю. Электронно-колебательные спектры многоатомных молекул: Теория и методы расчета. М.: Наука, 1997. с. 208-245.
2. Sharp T.E., Rosenstock H.M. // J. Chem. Phys. Vol. 41. 1964. № 11. P. 3453–3463.

## Приложение

Текст m-файла для расчета относительных значений интеграла перекрытия.

```
function io=intovl(m,n,j,g)
%INTOVL Относительное значение интеграла перекрытия
% INTOVL(M,N,J,G) равен отношению значения многомерного
% интеграла перекрытия гармонических волновых функций
%  $W'(M)$  и  $W(N)$  к значению интеграла перекрытия от
%  $W'(0)$  и  $W(0)$ .
% Нормированные на амплитуду нулевых колебаний нормальные
% координаты волновых функций  $X'$  и  $X$ , соответственно,
% связаны соотношением Душинского в виде  $X'=J(X-G)$ .
%  $M$  и  $N$  - вектора, элементы которых равны соответствующим
% колебательным квантовым числам.

% Г.Г.Дьяченко 2-11-2000 г.

% Вычисление матриц, входящих в выражение производящей
% функции

k=j*g; % k = -K,  $X'=JX+K$ 
i1=eye(length(g)); % Единичная матрица
cc=2*inv(j'*j+i1);
ee=cc*j';
aa=j*ee-i1; % aa = A
bb=(aa-i1)*k; % bb = B
cc=cc-i1; % cc = C
dd=ee*k; % dd = D
ee=2*ee; % ee = E

% Формирование символьных массивов  $u_1, \dots, u_k$  и  $t_1, \dots, t_k$ ,
% где k - размерность интеграла перекрытия
u=sym(zeros(length(n),1));
for l=1:length(n),
    if n(l)>0
        u(l)=sym(['u' num2str(l)]);
    end
end

t=sym(zeros(length(m),1));
for l=1:length(m),
    if m(l)>0
        t(l)=sym(['t' num2str(l)]);
    end
end
```

```
% Формирование производящей функции

f=exp(t.*aa*t+t.*bb+u.*cc*u+u.*dd+u.*ee*t);

% Вычисление значения производной производящей функции
% по переменным t и u в точке 0
for l=1:length(n),
    if n(l)>0
        f=diff(f,u(l),n(l));
        f=subs(f,u(l),0);
    end
end
for l=1:length(m),
    if m(l)>0
        f=diff(f,t(l),m(l));
        f=subs(f,t(l),0);
    end
end

io=double(f); % Преобразование к численному виду

% Окончательное вычисление относительного значения
% интеграла перекрытия io
for l=1:length(n),
    if n(l)>0
        io=io/(prod(1:n(l))*2^n(l))^(1/2);
    end
end
for l=1:length(m),
    if m(l)>0
        io=io/(prod(1:m(l))*2^m(l))^(1/2);
    end
end
```

УДК 519.6

## **МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ НА НЕВЫПУКЛЫХ И НЕСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ**

Камышников В.А.

*Томский архитектурно-строительный университет, г. Томск*

*e-mail: [kva\\_son@yahoo.com](mailto:kva_son@yahoo.com)*

Успех линейного программирования в повышении эффективности экономического моделирования и оптимизации планирования хорошо известен. Это менее очевидно в технике, управлении и проектировании так как для более точного отражения моделью реальности часто бывают необходимы нелинейные функции.

Возможности симплексного метода и мощного программного обеспечения решения задач линейного программирования, успехи математического моделирования показали слабость математического аппарата в области нелинейных систем оптимизации, его несоответствие требованиям практики. Нельзя все математические модели реальных процессов в экономике, химии и технике приемлемо описать линейными моделями. Искусственное упрощение моделей видимо, принесет мало пользы, если не нанесет вред процессу практического использования математических моделей так и процессу их создания. Разработчики математических моделей, зная, что имеются методы решения только определенных классов задач могут сознательно упрощать, а точнее ухудшать, создаваемые модели.

Первоначально действительность уже упрощалась математической моделью и упрощение для алгоритма – это упрощение второго порядка. Такая практика может привести к ситуации, когда исследователь будет отвечать на вопрос, который природа не ставила. Все это создает предпосылки для развития моделей и методов нелинейного программирования.

Многие нелинейные оптимизационные задачи описаны как

задачи с выпуклыми или вогнутыми целевыми функциями и выпуклыми областями возможных значений параметров решений. В литературе внимание главным образом уделяется методам выпуклого программирования. Причиной является создание целой серии алгоритмов, дающих оптимальное решение за короткое время базирующихся на свойствах выпуклости или вогнутости функций. Это методы решения задач выпуклого, квадратичного, геометрического, сепарабельного и некоторых других частных классов задач нелинейного программирования.

По мнению ученых, Северо-западного Университета США создание универсального метода решения задач нелинейной оптимизации нереально. Более предпочтительно надеяться на разработку для каждого класса задач эффективного алгоритма. По этому пути и проводилось большинство исследований многими учеными по всему миру. Хотя исследования по созданию глобального алгоритма также проводились. В настоящее время существует несколько подобных алгоритмов. Это метод  $\Psi$ -преобразования академика В.К. Чиченадзе, метод профессора Л. Ингбера, методы интервальных вычислений.

Конечно можно, используя регулярные локальные методы или методы случайного поиска, многократно повторяя поиск из различных исходных точек, получить глобальное решение, но невозможно убедиться с помощью этих алгоритмов в том, что оно таковым является.

В моей работе я невольно подтверждаю и в то же время опровергаю это устоявшееся мнение. В ней не будет описан алгоритм поиска глобального решения общей задачи нелинейного программирования. Такой алгоритм, видимо, будет предметом еще долгих исследований математиков. А будет описано и исследовано создание универсального преобразования задач нелинейного программирования к определенному виду с последующим решением известными методами. Причем решение этой задачи соответствует глобальному минимуму исходной задачи нелинейного программирования.

Это стало возможным после того как, удалось дополнить теорию выпуклых функций результатами, позволившими почти рутинно относиться к процессу решения задач нелинейной, в т. ч. и дискретной оптимизации, решению дифференциальных (алгебраических) нелинейных уравнений и систем дифференциальных (алгебраических) нелинейных уравнений в том числе и в частных производных..

Эти результаты доказаны теоретически, и проверены практическим решением известных тестовых задач (задачи

Розенброка, Пауэлла, Вульфа), некоторых прикладных задач и многоэкстремальных задач разработанных самостоятельно с числом переменных от 1 до 12000.

Исследовалось время решения задач, с целью оценки возможностей компьютера Pentium 200. Время решения, зависит от размерности задач, вида функций. Наверное невозможно предложить формулу расчета времени решения. Можно сказать одно, что среди задач приведенных в данной работе не было таких, решение которых превышало бы один час.

Задача со 100 переменных очень сложной структуры решалась на ПК Pentium-200 15 минут. В программном обеспечении предусмотрена остановка процесса поиска при обнаружении глобального минимума или когда достигнуто заданное число итераций.

В качестве метода решения преобразованной задачи использован метод деформируемого многогранника с использованием идей метода наискорейшего спуска. Для оценки локальных решений использовались средства MATLAB.

Приведу несколько примеров решения задач нелинейного программирования и нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Задача с многоэкстремальной целевой функцией, невыпуклой и несвязной областью.

Минимизировать функцию

$$EE(1)=0.001((X(1)-10)*(X(1)-1)*(X(1)-2)*(X(1)-3)*(X(1)-4)*(X(1)-5)* \\ (X(1)-6)*(X(1)-7)*(X(1)-8)*(X(1)-9)+\text{COS}(17*X(1))*(X(2)-5)*(X(2)-6)),$$

при ограничении:

$$EE(2)=((\text{SIN}(X(1)+X(2)))^2) \leq 0.$$

Решение:

$$EE(1)= -42.934, X(1)=1.29, X(2)=11.279, EE(2)= 0.$$

2. У задачи невыпуклая и несвязная область допустимых решений и многоэкстремальная целевая функция.

$$EE1=3*(\text{SIN}(4*(3+X(1))))^2+(\text{SIN}(4+X(1)))^2, \\ EE2=(X(2)-22)^2+(\text{SIN}(13*X(2)-3))^4, \\ EE3=\text{SIN}((X(3)+\text{SIN}(X(3))+4)^2/(10+\text{EXP}(\text{SIN}(33*X(3))))), \\ EE4=\text{SIN}(X(4)*0.01)*(X(4)-5)^2*22*(1/(X(4)+4))* \\ (\text{SIN}(13*X(4))+\text{COS}(20*X(4))), \\ \text{если } X(4) > 10, \text{ то } EE4=1,$$

если  $X(4) < 9$ , то  $EE4 = EE4 * 10$ ,  
 $EE5 = 10 * (X(5) - 3.14) ** 2 + 100 * (SIN(5 * X(5)) + SIN(10 * X(5)) + SIN(50 * X(5)))$ ,  
 $EE6 = (SIN(X(6)) + SIN(7 * X(6)))$ ,  
 $EE7 = 0.01 * (X(7) - 18)^2 + 33 * (SIN(33 * SIN(X(7))))$ ,  
 $EE8 = 2 * SIN((SIN(2 * X(8)) + COS(7 * X(8)))^2)$ ,  
 $EE9 = 1 / (10 + ((X(9) - 3.1416)^2) * SIN(777 * X(9)))$ ,  
 если  $EE9 > 50$  или  $EE9 < -50$ , то  $EE9 = 5 * SIN(SIN(X(9)))$ ,  
 $EE10 = 50 * (SIN(10 * SIN(5 * (X(10) - 3)^2)) + SIN(0.1 * X(10)))$   
 если  $(X(10) < 47.3$  или  $X(10) > 47.38)$  и  $EE10 < 0$ , то  $EE10 = 0.1 * EE10$ ,  
 $EE11 = 0.1 * ((X(11) - 3.1416)^2) * SIN(7 * X(11))$ ,  
 если  $X(11) > 4.7$ , то  $EE11 = 20$ ,  
 $EE12 = -(SIN((EXP(SIN(X(12))))^2))^2 + SIN(0.03 * (X(12) + 7.7)) + EXP(-X(12))$ ,  
 $EE13 = -1 * (10 * SIN(X(13)) + (X(13) - 0.1) * (X(13) - 1.2) * (X(13) - 1.3) * (X(13) - 1.4) * (X(13) - 1.5) * (X(13) - 1.6) * (X(13) - 1.7) * (X(13) - 1.8))$ ,  
 если  $EE13 < -45$ , то  $EE13 = 20 * SIN(7 * X(13))$ ,  
 $EE14 = 0.01 * ((X(14) - 10) * (X(14) - 1) * (X(14) - 2) * (X(14) - 3) * (X(14) - 4) * (X(14) - 5) * (X(14) - 6) * (X(14) - 7) * (X(14) - 8) * (X(14) - 9) + COS(17 * X(14)))$   
 $EE15 = ((X(15) - 10) * (X(15) - 1) * (X(15) - 2) * (X(15) - 3) * (X(15) - 4) * (X(15) - 5) * (X(15) - 6) * (X(15) - 7) * (X(15) - 8) * (X(15) - 9) * (X(16) - 0.5) * (X(16) - 1.5))$   
 если  $X(15) < 1$  или  $X(15) > 9$ , то  $EE15 = 1000 + X(15)$ ,  
 если  $X(16) < 0.5$  или  $X(16) > 1.5$ , то  $EE15 = 1000 + X(16)$ .

Минимизировать функцию:

$EE(1) = EE1 + EE2 + EE3 + EE4 + EE5 + EE6 + EE7 + EE8 + EE9 + EE10 + EE11 + EE12 + EE13 + EE14 + EE15$

при ограничениях:

$(COS(3.22 * X(6)) + 1) \leq 0$ ,  
 $(COS(3 * 3.1416 * X(8)) + 1)^2 \leq 0$ ,  
 $(SIN(3.1416 * X(11)))^2 \leq 0$ ,  
 $(SIN(2 * 3.1416 * X(14)))^2 \leq 0$ ,  
 $(SIN(3.1416 * (X(15) + X(16))))^2 \leq 0$ ,  
 $4 \geq X(5) \leq 5$ ,  
 $X(6) \leq 10$ ,  
 $X(7) \leq 7$ .

Решение:

$EE(1) = -1915.788694921397$ ,  $X(1) = 0.131871020696198$ ,  
 $X(2) = 20.80088251308420$ ,  $X(3) = 0.353068688794066$ ,  
 $X(4) = 2.697840480509861$ ,  $X(5) = 4.242435892328644$ ,  
 $X(6) = 0.974888283143563$ ,  $X(7) = 2.011748315034711$ ,  
 $X(8) = 2.318323756624112$ ,  $X(9) = 1.975111360343816$ ,  
 $X(10) = 2.100490032608072$ ,  $X(11) = 2.000018801555624$ ,  
 $X(12) = 2.255865888799961$ ,  $X(13) = 1.610062891264717$ ,  
 $X(14) = 1.489818766172206$ ,  $X(15) = 2.265667354143667$ .

3. Многоэкстремальная целевая функция задачи включает в себя несколько нелинейных функций в том числе функцию Розенброка и функцию Пауэлла.

$EE1 = 3(\sin(4(3+X(1))))^2 + (\sin(4+X(1)))^{12}$   
 $EE2 = (X(2)-22)^2 + (\sin(13X(2)-3))^4$   
 $EE3 = \sin((X(3)+\sin(X(3))+4)^2 / (10+\exp(\sin(33X(3))))$ ,  
 $EE4 = \sin(0.01X(4)) * (X(4)-5)^2 * 22(1/(X(4)+4)) * (\sin(13*X(4))+\cos(20*X(4)))$ ,  
если  $X(4) > 10$ , то  $EE4 = 1$ ,  
если  $X(4) \leq 9$ , то  $EE4 = 10EE4$ ,  
 $EE5 = 100(X(6)-X(5))^2 + (1-X(5))^2$ ,  
 $EE6 = (X(7)+10X(8))^2 + 5(X(9)-X(10))^2 + (X(8)-2X(9))^4 + 10(X(7)-X(10))^4$ .

Минимизировать функцию

$EE(1) = EE1 + EE2 + EE3 + EE4 + EE5 + EE6$ .

Решение:

$EE(1) = -10.68320291555915$ ,

$X(1) = 0.132013684465949$ ,  $X(2) = 21.98730478737376$ ,  
 $X(3) = 0.043249133380058$ ,  $X(4) = 1.389703744235645$ ,  
 $X(5) = 0.956188936906300$ ,  $X(6) = 0.914125130810625$ ,  
 $X(7) = 0.005802403319535$ ,  $X(8) = 0.000000000100000$ ,  
 $X(9) = 0.058977420567573$ ,  $X(10) = 0.59631444665114$ .

Примеры решения дифференциальных уравнений в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных, которые не имеют решения в элементарных функциях, решаются численными методами. Это разностные схемы для решения задач параболического, эллиптического и гиперболического типа. Метод моментов и метод Галеркина основаны на поиске функции-решения в виде алгебраической суммы функций линейной по параметрам.

Предлагаемый автором подход позволяет получить решение дифференциальных уравнений в частных производных в виде алгебраической суммы элементарных функций с линейными и нелинейными параметрами.

Примеры решения обыкновенных дифференциальных уравнений в виде суммы элементарных функций. Пусть  $Y$  – функция-решение дифференциального уравнения,  $Y_1, Y_2, \dots$  – первая, вторая и так далее производные.

1. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F = \text{EXP}(-\text{ABS}(Y^{**2} + \text{SIN}(Y) + Y_1^{**3} - \text{EXP}(-\text{ABS}(Y - Y_1 + \text{SIN}(T) - \text{COS}(T)))))) - T * Y * Y_1^{**3} = 0$$

на интервале интегрирования [0 - 5], с шагом интегрирования 0.500.

Решение. Суммарная ошибка равна 0.0001. Число итераций = 5.

Функция-решение дифференциального уравнения:

$$Y = -.17001 * \text{SIN}(.27549 * T) + .45688 * \text{SIN}(.13716 * T) + -.10375 * \text{SIN}(.25196 * T) + .40123 * \text{COS}(.29190 * T) + 10 * -.79475 * \text{COS}(.03287 * T) + 5 * -.02601 * \text{COS}(.52977 * T) + 0.1 * .77562 * \text{EXP}(-.12054 * T) + 0.01 * -.12152 * \text{EXP}(-.19184 * T) + 0.001 * .38938 * \text{EXP}(-.05314 * T) + -.26027.$$

2. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F = Y_1 + T * (\text{ABS}(T * Y * Y_1 + Y_2 * Y_3 * Y_4)) + T * Y * Y_1 + \text{SIN}(Y^{**3} + Y_1^{**2}) + Y_1 - Y - Y_2 - Y_3 - Y_4 * T + \text{COS}(Y + Y_1) + \text{SIN}(T * Y * Y_1) + 5 = 0$$

на интервале интегрирования [0 - 5], с шагом интегрирования 0.5.

Решение. Суммарная ошибка = 0.065. Число итераций = 100.

Функция-решение дифференциального уравнения:

$$Y = -.07259 * \text{SIN}(.04960 * T) + 10 * -.01554 * \text{SIN}(-.01733 * T) + 20 * -.04337 * \text{SIN}(-.03910 * T) + .00236 * \text{COS}(-.01619 * T) + 10 * -.03004 * \text{COS}(-.01997 * T) + 20 * .00187 * \text{COS}(-.01895 * T) + 0.1 * -.03077 * \text{EXP}(-.01094 * T) + 0.01 * .00228 * \text{EXP}(-.01777 * T) + 0.001 * -.03061 * \text{EXP}(-.01018 * T) + -.05193.$$

3. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с одной неизвестной функцией на интервале интегрирования [0 - 5], с шагом интегрирования 0.5.

$$F_1 = Y_1 + Y * Y_2 * Y_3 * Y_1 * \text{EXP}(-T - \text{SIN}(T + Y * Y_1)) = 0$$

$$\begin{aligned}F2 &= Y2 + Y * Y1 * Y3 * Y1 * \text{EXP}(-T - \text{COS}(T + Y * Y2)) = 0 \\F3 &= Y3 + Y * Y4 * Y2 * Y4 * \text{EXP}(-T - \text{SIN}(T + Y * Y3)) = 0 \\F4 &= Y4 + Y * Y3 * Y2 * Y4 * \text{EXP}(-T - \text{COS}(T + Y * Y4)) = 0\end{aligned}$$

Решение. Суммарная ошибка = 0.002. Число итераций = 5.  
Функция-решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}Y &= .00973 * \text{SIN}(.00974 * T) + .00975 * \text{SIN}(.00974 * T) + .00975 * \text{SIN}(.00974 * T) + \\&.00889 * \text{COS}(.00888 * T) + 10 * .00881 * \text{COS}(.00867 * T) + 5 * .00883 * \\&\text{COS}(.00881 * T) + 0.1 * .00881 * \text{EXP}(-.00881 * T) + 0.01 * .00889 * \text{EXP}(- \\&.00889 * T) + 0.001 * .00890 * \text{EXP}(-.00890 * T) + .54950.\end{aligned}$$

Примеры решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пусть  $Y$ -искомая функция-решение дифференциального уравнения.  $Y1(j)$  – первая производная по переменной  $j$ ;  $Y2(i,j)$  – производная по переменным  $i$  и  $j$ .

1. Решить дифференциальное уравнение в частных производных

$$F = Y + Y1(1) + Y1(2) + Y2(1,2) - (\text{SIN}(T(1) + T(2)) + 2 * \text{COS}(T(1) + T(2)) - \text{SIN}(T(1) + T(2))) = 0$$

на интервале интегрирования  $[0 - 5]$ , с шагом интегрирования 0.5.

Решение. Максимальная ошибка = 0.001. Число итераций = 5.  
Функция-решение дифференциального уравнения:

$$Y = 0.99996 * \text{SIN}(0.99996 * T(1) + 1.00057 * T(2)).$$

2. Решить дифференциальное уравнение в частных производных

$$F = Y + Y1(1) + Y1(2) + Y2(1,2) - \text{SIN}(T(1) + T(2)) + 2 * \text{COS}(T(1) + T(2)) - \text{SIN}(T(1) + T(2)) = 0$$

на интервале интегрирования  $[0 - 5]$ , с шагом интегрирования 0.5.

Решение. Максимальная ошибка = 0.067. Число итераций = 5.  
Функция-решение дифференциального уравнения:

$$Y = 0.98942 * \text{SIN}(1.00007 * T(1) + 1.00000 * T(2)) + 1.00000 * \text{COS}(1.00000 * T(1) + 0.03840 * T(2)).$$

3. Решить дифференциальное уравнение в частных производных

$$F=Y+\text{COS}(\text{SIN}(Y1(1)+Y1(2)))+Y2(1,2)+\text{SIN}(Y*Y1(1)*Y1(2)*Y2(1,2))-\text{COS}((\text{SIN}(T(1)+T(2))*\text{SIN}(-2+\text{COS}(T(1)**2+\text{SIN}(7*T(2))+11))))=0$$

на интервале интегрирования [0 - 1], с шагом интегрирования 0.1.

Решение. Максимальная ошибка = 0.233. Число итераций = 50.

Функция-решение дифференциального уравнения:

$$Y=-0.48979*\text{SIN}(0.03462*T(1)+0.60583*T(2))+0.04099*\text{COS}(-0.46608*T(1)+0.11197)*T(2))+0.60510+0.01522*\text{SIN}(-0.46085*T(1))+0.14465*\text{SIN}(0.60599*T(2))-0.20998*\text{COS}(-0.45563*T(1))-0.05086*\text{COS}(-0.11664*T(2))-0.26940 * \text{EXP}(-0.30748*T(1))-0.09579*\text{EXP}(0.44112*T(2)).$$

УДК 519.6

## КАК РИСОВАТЬ ОРГРАФЫ ПО ЗАДАННОЙ МАТРИЦЕ СМЕЖНОСТИ В MATLAB

Клочкова И.Н.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
г. Москва

e-mail: [ikokl@orc.ru](mailto:ikokl@orc.ru)

Орграфы, ассоциированные с квадратными матрицами, используются во многих прикладных областях, в частности, для исследования и иллюстрации моделей динамики популяции с дискретной структурой, моделей многовидовых сообществ и др. [3]. В задачах теоретической популяционной биологии определен класс квазирецессивных матриц [2], причем определение квазирецессивности не является конструктивным: матрица  $A$  называется *квазирецессивной*, если найдется такая диагональная матрица  $B$  с положительными элементами на главной диагонали, что матрица  $AB$  рецессивна (рецессивность матрицы проверяется уже достаточно просто) [1]. Подобрать матрицу  $B$  в нетривиальных случаях довольно трудно. Здесь-то и помогают орграфы.

Для неотрицательных неразложимых матриц с элементами  $\delta_i = \{0,1\}$  на главной диагонали найден критерий квазирецессивности [1]: такие матрицы квазирецессивны тогда и только тогда, когда условие

$$A[\underline{c}]_{\rightarrow} \geq \prod_{i \in V[\underline{c}]} \delta_i$$

выполнено хотя бы для одного простого цикла в орграфе, для которого «булеан»  $A$  является матрицей смежности, где  $A[\underline{c}]_{\rightarrow}$  – произведение элементов матрицы, соответствующих простому циклу  $I[\underline{c}]_{\rightarrow}$ .

При невысоких порядках матрицы, нарисованный орграф помогает легко отыскать простой цикл. Критерий квазирецессивности, как и построение орграфа по заданной матрице смежности, также реализован автором в MATLAB.

### *Литература*

1. Логофет Д.О. Пути и циклы в орграфе как инструменты характеристики некоторых классов матриц // ДАН. 1999. Том 367. № 3. С. 295-298.
2. Logofet D.O. Matrices and Graphs: Stability Problems in Mathematical Ecology. Boca Raton (Fla.): CRC Press, 1993. 308 p.
3. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.

УДК 519.622

## ТЕСТОВОЕ СРАВНЕНИЕ РЕШАТЕЛЕЙ ОДУ СИСТЕМЫ MATLAB

Козлов О.С., Скворцов Л.М.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва

e-mail: [kozlov7@power.bmstu.ru](mailto:kozlov7@power.bmstu.ru), [v401@sm.bmstu.ru](mailto:v401@sm.bmstu.ru)

Для численного решения ОДУ в системах MATLAB и Simulink реализованы 7 методов с автоматическим выбором шага и 5 методов с постоянным шагом. Данный набор методов позволяет эффективно решать самые различные задачи, но при этом возникает проблема выбора наиболее подходящего метода и правильного задания его параметров. Обоснованные рекомендации по выбору того или иного метода можно давать только на основе решения задач различных типов. Вопросы сравнения программ решения ОДУ на тестовых задачах рассматривались в монографиях [1,2]. Обширный набор тестовых задач (в основном дифференциально-алгебраических) с результатами их решения различными программами доступен через <http://www.dm.uniba.it/~testset/>.

На ряде тестовых задач мы произвели сравнение решателей ОДУ системы MATLAB, включив в число испытуемых также методы, реализованные в программном комплексе "Моделирование в технических устройствах" (ПК "МВТУ") [3], который является аналогом системы Simulink. Рассматривались задачи трех типов: нежесткие, жесткие и разрывные. В качестве тестовых были выбраны 6 нежестких задач из [1], 6 жестких задач из [2] и 3 задачи с разрывами правой части. Каждая задача решалась при пяти значениях задаваемой относительной погрешности  $Tol$  ( $1e-2$ ,  $1e-3$ , ...,  $1e-6$ ). Для каждого типа задач построены графики зависимости объема вычислений от усредненной (по всем задачам данного типа) точности решения. В качестве меры вычислительной работы использовалось число вычислений функции, а фактическая точность оценивалась по формуле

$$accuracy = -\log_{10}(error),$$

где  $error$  - максимальная (среди всех компонент решения) относительная ошибка в конце интервала интегрирования. Для

неявных методов учитывались также вычисления функции, выполняемые при расчете матрицы Якоби путем численного дифференцирования. Эксперименты проводились на версии MATLAB 5.3.

Подготовку задачи для тестирования рассмотрим на примере нежесткого осциллятора Ван-дер-Поля [1]. В этом случае функция, реализующая вычисление производных, имеет вид

```
function dy = vdpl(t,y)
dy = zeros(2,1);
dy(1) = y(2);
dy(2) = (1 - y(1)^2)*y(2) - y(1);
```

а программа, вычисляющая численные характеристики решателя ОДУ, запишется в виде

```
Tol=1e-2; Atol=1e-2*Tol;
T=20; h0=T/100;
y0 = [2,0];
yexact = [2.00814976217, -0.042508875273];
opt=odeset('AbsTol',Atol,'RelTol',Tol, ...
'InitialStep',h0,'MaxStep',T);
[t,y,z] = ode45('vdpl',[0,T],y0,opt);
yend = y(length(t),:);
error = max(abs((yexact - yend)./ yexact));
accuracy = -log10(error)
Nf = z(3)
```

Здесь *yexact* - точное решение в конце интервала, которое было вычислено при  $Tol=1e-12$ .

**Нежесткие задачи.** Для всех типов задач мы старались выбрать известные тесты, несложные для программирования, но трудные для численного решения. Нежесткие задачи представляет тестовый набор из шести задач, математическое описание которых содержится в [1]. Все задачи решались на интервале и при начальных условиях, определенных в [1]. Начальный шаг для всех задач задавали  $h_0 = T/100$ , где  $T$  - величина интервала интегрирования. Абсолютная погрешность принималась  $Atol = 1e-2 * Tol$ . Использовались решатели, реализующие явные методы: ode45 - одношаговый метод Дорманда-Принса 5-го порядка; ode23 - одношаговый метод Богацки-Шампайна 3-го порядка, ode113 - многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 12), основанный на формулах Адамса. Описание этих методов можно найти в [1,4,5].

Среди явных методов, реализованных в ПК "МВТУ" мы выбрали два, показавшие лучшие результаты: Мерсона 4-го порядка и адаптивный многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 6). Явные адаптивные методы предложены в [7,8] и интересны тем, что позволяют эффективно решать многие жесткие задачи. Результаты экспериментов в виде зависимости числа вычислений функции (в логарифмическом масштабе) от точности приведены на рис. 1.

Как и следовало ожидать, наклон кривых на графике определяется порядком метода - чем выше порядок, тем меньше наклон. При всех значениях допустимой погрешности лучшим оказался решатель переменного порядка ode113, причем при увеличении точности его преимущество возрастает. Эксперименты также показали, что фактически получаемая точность, как правило, не соответствует задаваемой, а при  $Tol=1e-2$  результаты моделирования могут быть недостоверными.

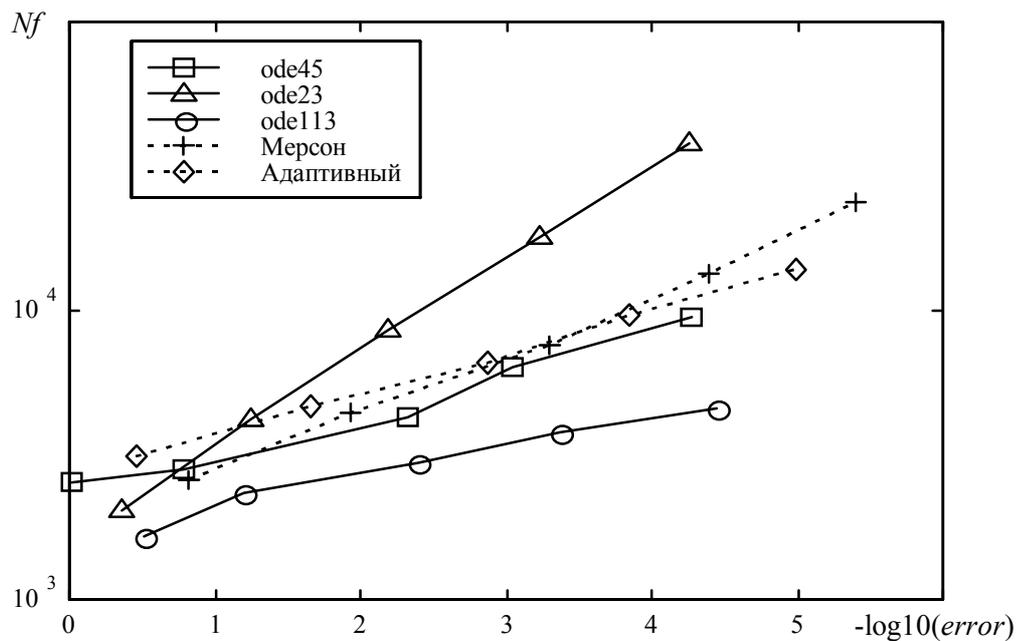


Рис. 1. Результаты решения нежестких задач.

**Жесткие задачи.** Были выбраны первые шесть из тестовых задач, математическое описание которых приведено в [2]. Интервал интегрирования задавали  $T=3$  для задачи VDPOI,  $T=321.8122$  для HIREC,  $T=1e7$  для E5, а для остальных задач - как в [2]. Для всех задач использовался одинаковый начальный шаг  $h_0=1e-6$ . Абсолютная погрешность принималась  $Atol=Tol$  для VDPOI,  $Atol=1e-12*Tol$  для ROBER,  $Atol=1e-6*Tol$  для OREGO,  $Atol=1e-4*Tol$  для HIREC,  $Atol=1e-24*Tol$  для E5,  $Atol=1e-3*Tol$  для PLATE. Использовались решатели, реализующие неявные методы:

ode15s - многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 5), основанный на формулах численного дифференцирования, ode23s - метод Розенброка 2-го порядка, ode23t - метод трапеций 2-го порядка, ode23tb - диагонально неявный метод Рунге-Кутты 2-го порядка, известный как TR-BDF2. Описание этих методов можно найти в [4,6]. Только два решателя (ode15s и ode23tb) смогли правильно и с приемлемыми затратами решить все 6 задач. Задача ROBER оказалась трудной для ode23t - при любом уровне точности требовалось более 45000 вычислений. Решатель ode23s не смог правильно решить задачу E5, а для решения задачи PLATE требовалось очень много вычислений (вследствие того, что метод Розенброка требует обновления матрицы Якоби на каждом шаге).

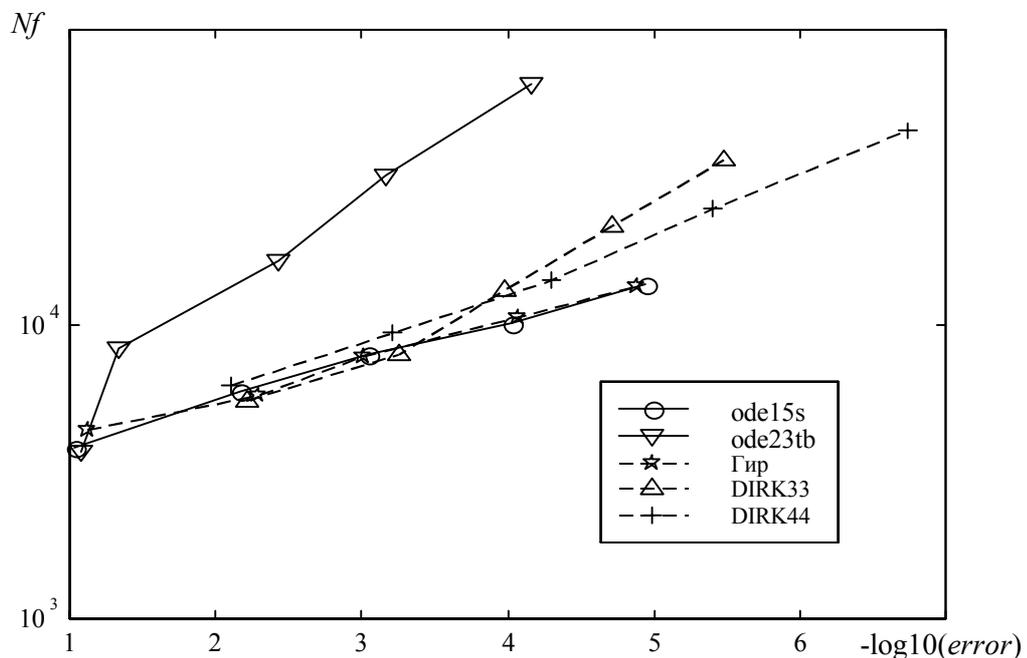


Рис. 2. Результаты решения жестких задач.

Результаты решения жестких задач представлены на рис.2. Сюда включены также результаты, полученные решателями ПК "МВТУ", реализующими следующие неявные методы: Гир - многошаговый метод Гира переменного порядка (от 1 до 6), основанный на формулах дифференцирования назад; DIRK33 и DIRK44 - диагонально неявные FSAL-методы Рунге-Кутты порядка 3 и 4, соответственно. Многошаговые решатели ode15s и Гир показали очень близкие результаты и при высокой точности имеют преимущество по сравнению с другими. Решатели ode23tb, DIRK33 DIRK44 реализуют методы одного типа [6,9], но разного порядка.

Результаты применения этих методов при решении множества различных задач показывают их перспективность, особенно для задач, содержащих алгебраические уравнения.

Для сравнения методов, которые не смогли решить все жесткие задачи, приводим на рис. 3 результаты решения уравнения Ван-дер-Поля (VDPOL), которое является наиболее распространенным тестом для жестких задач. При  $Tol=1e-2$  решатели ode23t и ode23tb показали совершенно неверные результаты, а точность решателей ode15s и Гир была недостаточной. Лучшим при всех уровнях точности оказался явный адаптивный многошаговый метод, который также и на задачах OREGO и HIRES показал результаты, сравнимые с лучшими неявными методами.

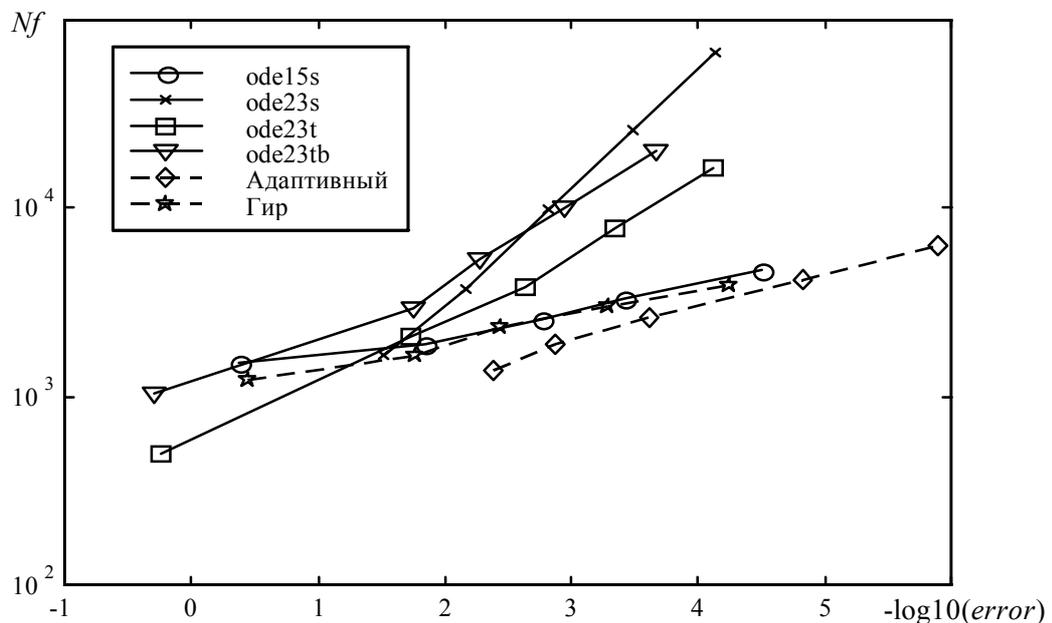


Рис. 3. Результаты решения задачи VDPOL.

**Разрывные задачи.** В качестве тестовых предложены следующие задачи:

**VDP2** - тест, построенный аналогично осциллятору Ван-дер-Поля, задается уравнениями

$$\begin{aligned} dy(1) &= y(2); \\ dy(2) &= \text{sign}(1 - \text{abs}(y(1))) * y(2) - y(1); \end{aligned}$$

и решается на интервале  $[0, 20]$  при начальном условии  $y_0 = [2.5, 0]$ .

**BALL** - уравнения "скачущего мяча":

```

g = 9.81;
dy(1) = y(2);
if y(1)<0 dy(2) = -g - 1e8*y(1) - 400*y(2);
else dy(2)=-g;
end
    
```

с начальным условием  $y_0=[1, 0]$  и интервалом интегрирования  $[0, 10]$ .

**RELAY** - простейшая модель следящей системы с релейным управлением:

```

e = sin(t) - y(1);
if (abs(e) - 0.02) < 0 u=0;
else u = 10*sign(e);
end
dy(1) = y(2);
dy(2) = -y(2) + u;
    
```

при начальном условии  $y_0=[0, 0]$  и на интервале  $[0, 7]$ .

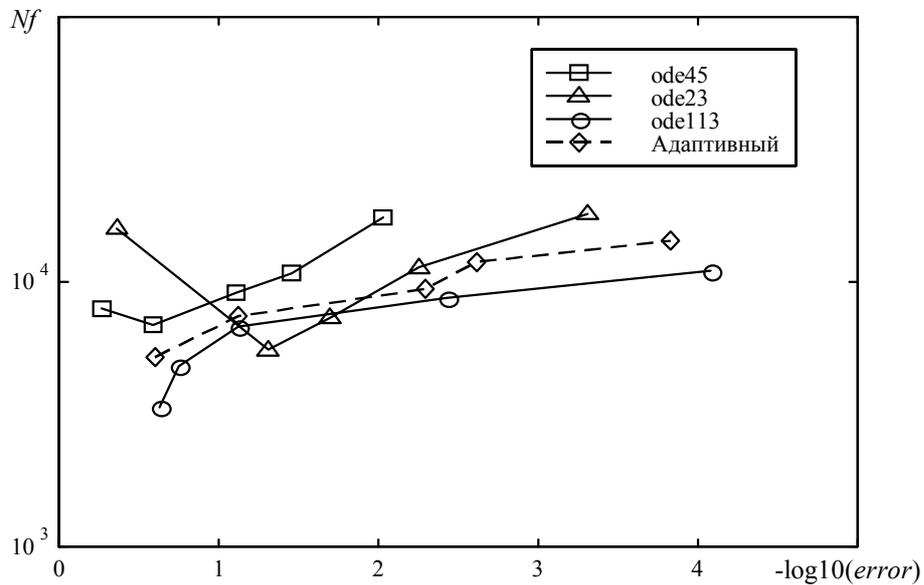


Рис. 4. Результаты решения разрывных задач (явные методы).

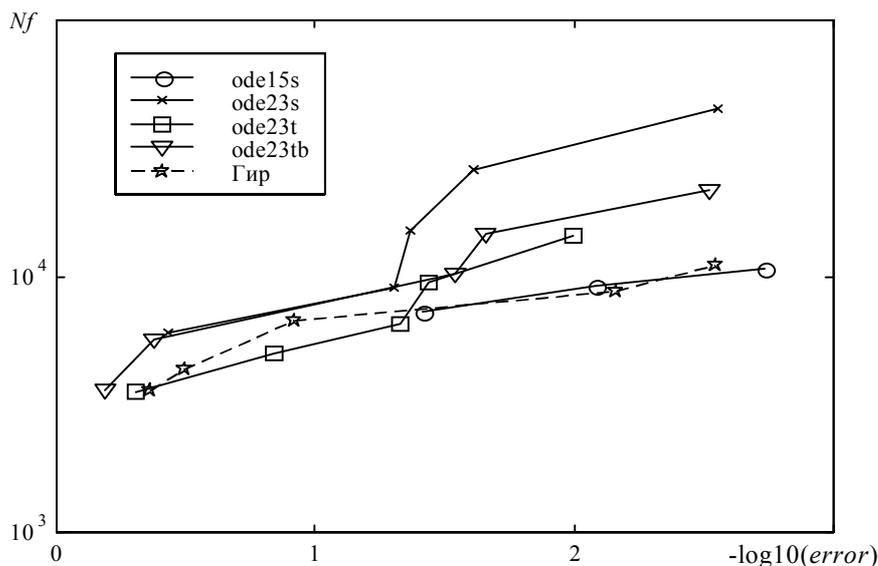


Рис. 5. Результаты решения разрывных задач ( неявные методы).

Для всех задач принимаем  $h_0=1e-2$ . Для задачи BALL задаем  $Atol=1e-2*Tol$ , для двух других задач  $Atol=Tol$ . Результаты решения разрывных задач явными методами приведены на рис.4, а неявными - на рис.5. При  $Tol=1e-2$  ни один метод не дал правильного решения всех трех задач, поэтому эти результаты не следует принимать во внимание. Благодаря снижению порядка в окрестности точек разрыва и повышению на гладких участках, некоторое преимущество имеют методы переменного порядка. Отметим, что решатель 5-го порядка ode45s оказался хуже решателя 3-го порядка ode23s.

### Литература

1. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
2. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
3. Козлов О.С., Медведев В.С. Цифровое моделирование следящих приводов. В кн.: Следящие приводы. В 3-х т. Под ред. Б.К. Чемоданова. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, т. 1, 1999, с.711-806.
4. Shampine L.F., Reichelt M.W. The MATLAB ODE Suite // SIAM J. on Scientific Computing. Vol. 18. 1997. № 1. P. 1-22.
5. Bogacki P., Shampine L.F. A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas

- // Applied Mathematics Letters. Vol. 2. 1989. № 4. P. 321-325.
6. *Hosea M.E., Shampine L.F.* Analysis and implementation of TR-BDF2 // Applied Numerical Mathematics. Vol. 20. 1996. № 1-3. P. 21-37.
  7. *Скворцов Л. М.* Адаптивные методы численного интегрирования в задачах моделирования динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 4. С. 72-78.
  8. *Скворцов Л. М.* Явные адаптивные методы численного решения жестких систем // Математическое моделирование. Т. 12. 2000. № 2. С. 97-107.
  9. *Скворцов Л. М.* Диагонально неявные FSAL-методы Рунге-Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Математическое моделирование. Т. 14. 2002. № 2. С. 3-17.

УДК 519.6

## РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MATLAB АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ СЛОИ ВЕЩЕСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ОБЪЕМНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

Махотин Д.Ю.<sup>1</sup>, Кочкин В.Н.<sup>2</sup>, Цетлин В.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ГНЦ РФ Институт медико-биологических проблем РАН,

<sup>2</sup>РНИЦ "Курчатовский институт", г. Москва

e-mail: [Makhotin@mail.ru](mailto:Makhotin@mail.ru), [slv\\_k@mail.ru](mailto:slv_k@mail.ru), [tsetlin@imbp.ru](mailto:tsetlin@imbp.ru)

Целью разработки метода расчета характеристик электронных пучков при прохождении через диэлектрические слои является необходимость оценки защитных свойств материалов, способных накапливать объемный электрический заряд в различных условиях облучения [1-10]. Это касается как облучения на линейном ускорителе электронов и облучения бета-радиоактивными источниками, так и облучения спектрами электронов, характерными для различных орбит искусственных спутников Земли.

Алгоритм расчета построен по следующей схеме:

1. Ввод исходных данных.
2. Розыгрыш координат входа электрона в образец.
3. Цикл расчета, пока есть электроны в образце с  $T > T_{min}$ :
  - Расчет параметра экранирования.
  - Расчет полного сечения взаимодействия.
  - Расчет длины свободного пробега электрона.
  - Розыгрыш углов рассеяния электрона.
  - Расчет координат электрона.
  - Поправка на взаимодействие с электрическим полем.
  - Проверка геометрии.
  - Расчет ионизационных потерь энергии оставшихся электронов.

В качестве исходных данных задаются параметры материала, геометрические размеры источника, образца и детектора электронов, условие падения пучка электронов на образец –

нормальное, под фиксированным углом или изотропное, а так же условия для розыгрыша начальной энергии падающих электронов.

Энергия падающих электронов может разыгрываться в соответствии с произвольно заданным энергетическим спектром. Для этого проводится предварительная подготовка, заключающаяся в получении функции, обратной функции вероятности, заданной PP-формой кубического сплайна. На рис. 1 представлен энергетический спектр бета-источника  $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}$  – экспериментальные точки и аппроксимация полиномами. На рис. 2 показана функция вероятности для розыгрыша энергии падающего электрона в соответствии со спектром на рис. 1.

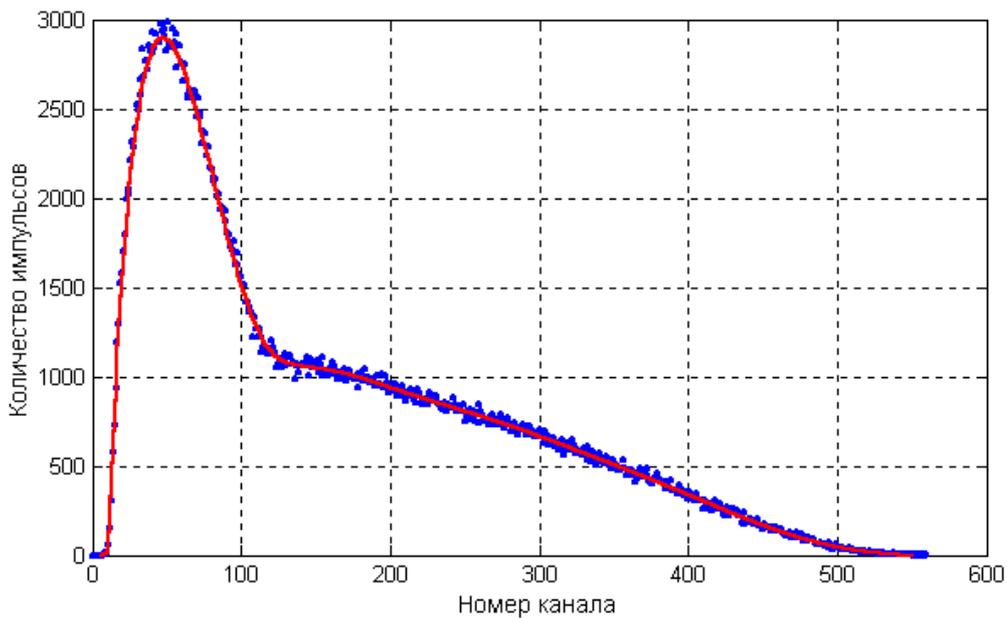


Рис. 1. Экспериментальный спектр бета источника  $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}$ , аппроксимированный полиномами.

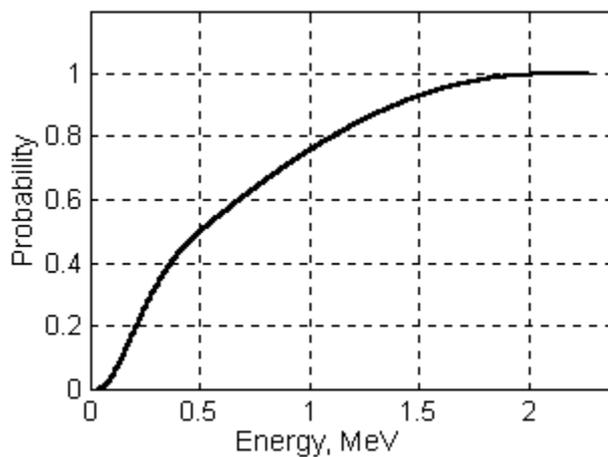


Рис. 2. Функция вероятности для розыгрыша энергии электрона.

В качестве сечения рассеяния электрона на атоме среды используется сечение Дарвина – Резерфорда с параметром экранирования, предложенным Мольером [12]. Данное сечение дает хорошее согласие с экспериментальными работами в области энергий электронов до 3 – 5 МэВ. Отношение дифференциального сечения к полному сечению рассеяния дает выражение для плотности вероятности рассеяния электрона с энергией  $T$  на угол  $\vartheta$ , используемое для розыгрыша телесного угла рассеяния электрона [12]. Энергетические потери рассчитываются по формуле Бете–Блоха без учета эффекта плотности [13]. В алгоритме не учитываются флуктуации энергетических потерь и образование  $\delta$ -электронов, так как при расчете прохождения электронов широкого энергетического спектра погрешность, вносимая таким допущением достаточно мала. Расчет спектра тормозных  $\gamma$ -квантов находится в настоящее время на стадии тестирования. Расчет изменения параметров электрона проводится при каждом рассеянии, то есть после прохождения электроном длины свободного пробега  $\lambda$ .

В расчете взаимодействия электрона с электрическим полем объемного заряда используется ряд предположений. Распределение электрического поля имеет осевую симметрию и одинаково во всех плоскостях, параллельных поверхности образца. Силовые линии электрического поля направлены по оси  $Z$ . Так как размеры образца на несколько порядков превышают размеры налетающей частицы и диаметр пучка меньше диаметра образца, то можно считать, что электрон взаимодействует с электрическим полем равномерно заряженной плоскости или набора таких плоскостей в области объемного заряда. При этом в слое объемного заряда, где напряженность электрического поля изменяется по линейному закону, она считается постоянной на длине свободного пробега и равной значению, соответствующему его середине. Расчет изменения энергии и направления движения электрона в электрическом поле проводится для каждой длины свободного пробега. При этом считается, что электрон движется от соударения до следующего соударения с постоянной энергией. Это допущение справедливо, так как ионизационные потери электрона на длине свободного пробега достаточно малы. Таким образом, изменение параметров электрона в среде и в электрическом поле рассматриваются, как независимые процессы.

Основной особенностью представляемого алгоритма является возможность задавать произвольное распределение электрического поля по глубине образца. Экспериментально установлено, что разрядные фигуры, возникающие в стекле при ударно - стимулированной разрядке или спонтанной разрядке,

происходящей во время облучения, располагаются в узком слое стекла в плоскости, параллельной облучаемой поверхности. Глубина залегания разрядной фигуры зависит от условий облучения образца. При облучении образцов толщиной меньше максимального пробега электронов разрядная фигура располагается преимущественно в середине образца. В образцах, толщина которых значительно превышает пробег электронов, разрядные фигуры расположены на глубине, соответствующей их максимальному пробегу. Толщина слоя, который занимают разрядные фигуры, измерялась при помощи оптического стереомикроскопа и составляла около 0.01 см.

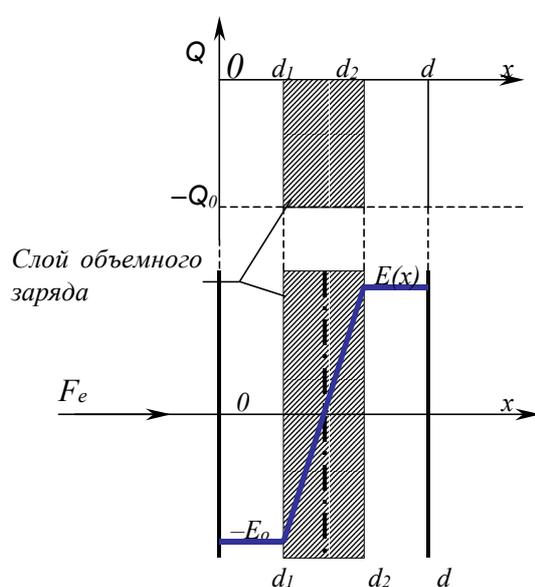


Рис. 3. Вид распределения заряда и электрического поля в образце.

Исходя из этого логично было предположить, что заряд в стекле располагается в ограниченном узком слое и, в первом приближении, имеет вид, представленный на рис. 3, где  $d_2 - d_1 = 0.01$  см. Более точное распределение и величину заряда можно получить, рассматривая самосогласованную модель накопления. Далее, решая уравнение Пуассона для заданного распределения заряда при условии равенства нулю потенциала между передней и задней поверхностями образца, получаем функцию распределения электрического поля.

Результаты расчетов показаны на рис. 4 – 6. На рис. 4 представлены гистограммы выделенной энергии в различных материалах в сравнении с расчетом по алгоритму [11] – гладкая кривая. Энергия падающего пучка – 1 МэВ, пучок падает по нормали к поверхности образца. Видно, что с увеличением

атомного номера – 6 у ПММА, 10 у стекла Ц-13 и 13 у алюминия, точность расчета снижается. Это связано, во-первых, с тем, что в расчете ионизационных потерь не учитывается эффект плотности и, во-вторых, не учитывается вклад в поглощенную энергию вторичных электронов и тормозных гамма-квантов. Поэтому данный алгоритм пригоден для расчетов материалов с атомными номерами  $Z \leq 30$ .

На рис. 5 представлен расчетный энергетический спектр прошедших электронов (гистограмма) за стеклом марки Ц-13 толщиной 1.33 мм в сравнении с экспериментальными данными (точки).

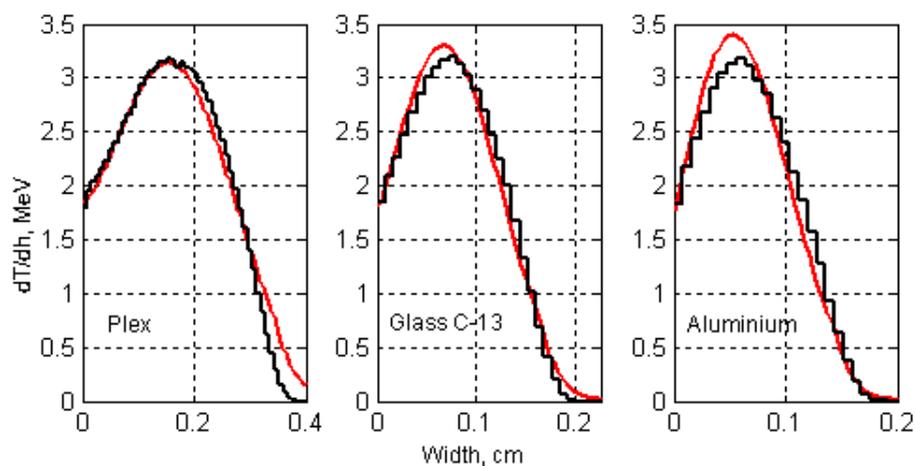


Рис. 4. Распределения выделенной энергии по глубине образца, гистограмма – расчет по данному алгоритму, гладкая кривая – расчет по алгоритму [11].

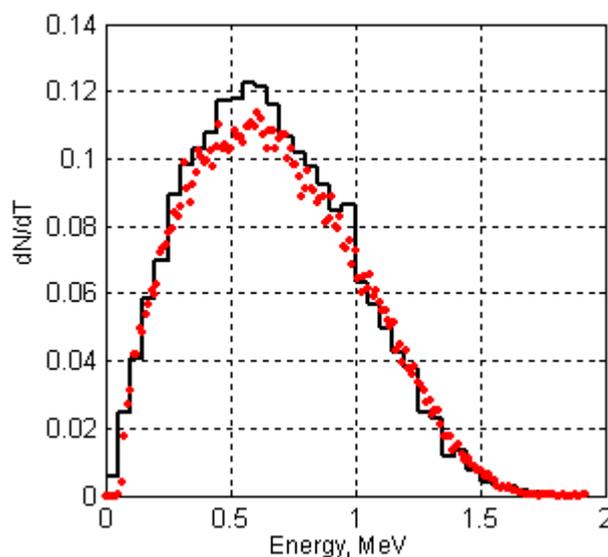


Рис. 5. Расчетные (гистограмма) и экспериментальные (точки) энергетические спектры прошедших электронов за стеклом Ц-13 толщиной 1.33 мм.

На рис. 6 представлены расчетные спектры прошедших электронов (гистограмма) за слоями ПММА различной толщины в сравнении с экспериментальными данными (точки).

На рис. 7 показаны спектры энергии прошедших электронов за стеклом марки Ц-13 при расчете без электрического поля – черная гистограмма, и с электрическим полем объемного заряда напряженностью  $2 \text{ МВ/г/см}^2$  – синяя гистограмма. Видно, что наличие электрического поля объемного заряда, распределение которого показано на рис. 3, не смещает пик распределения по шкале энергии, а лишь уменьшает количество прошедших электронов за счет увеличения коэффициента обратного отражения (с 33 до 47% в данном случае) и дополнительного торможения электронов в поле объемного заряда.

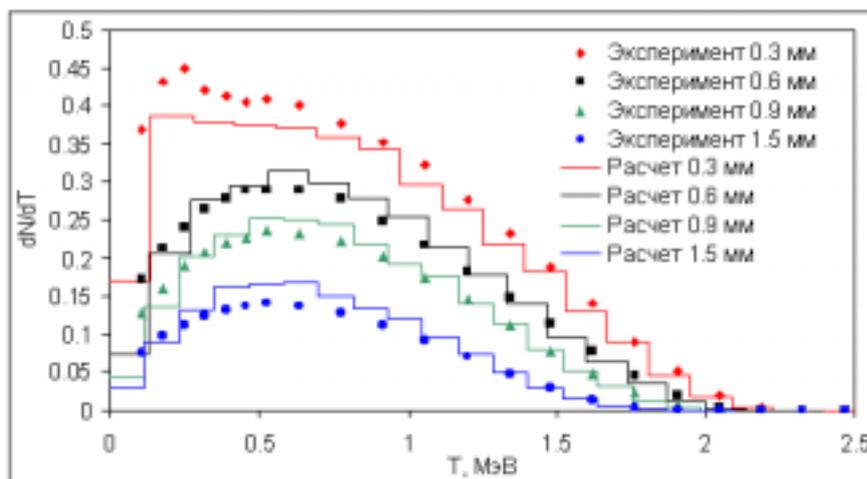


Рис. 6. Расчетные (гистограмма) и экспериментальные (точки) энергетические спектры прошедших электронов за ПММА различной толщины.

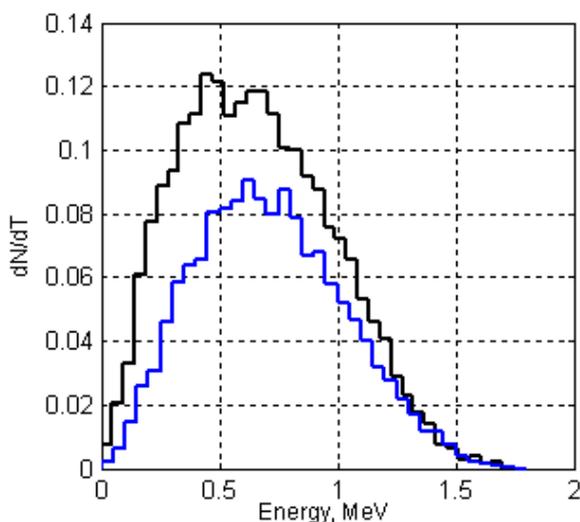


Рис. 7. Энергетические спектры прошедших электронов за стеклом Ц-13 толщиной 1.33 мм для  $E=0$  (черная гистограмма),  $E=2 \text{ МВ/г/см}^2$  (синяя гистограмма).

Наблюдается хорошее соответствие с экспериментальными данными и опубликованными ранее работами. Это позволяет использовать данный алгоритм для оценки защитных свойств стекол, способных накапливать объемный электрический заряд, в условиях облучения различными спектрами электронов, как, например, спектры электронов на различных орбитах искусственных спутников.

### *Литература*

1. Akatov Yu. A., Dudkin V. E., Kovalev E. E. et al. Intern. J. of Radiation Applications and Instrumentation, Part D, 17(2), 105 (1990).
2. Truchanov K. A., Morozov D. Kh., Tsetlin V. V. et al. Proceedings of the European Organization for Nuclear Res. - CERN, 1971, № 71-16/1, P. 501.
3. Milyavskii V.V. IEEE trans. on Dielectr. and Electr. Insulation, 6, 507 (1999).
4. Ауслендер В.Л., Лазарев В.Н., Цетлин В.В. // ЖТФ, 1983, т.53, N3, с.514.
5. Цетлин В. В., Павлушкина Т. К. и др. // ХВЭ, 1993, т.27, N 5, с.75.
6. Tsetlin V. V., Red'ko V. I., Milyavskiy V. V. et al. // Proc. 1<sup>st</sup> Int. Congress on Radiation Physics, High Current Electronics, and Modification of Materials. Tomsk, Sept. 2000. Vol. 1, p. 104.
7. Колтун М.М., Цетлин В.В. // Гелиотехника, 1985, N3, с.44.
8. Цетлин В.В. и др. // Космические исследования, 1995, т.33, N3, с. 286.
9. Григорьев А.И., Цетлин В.В., Павлушкина Т.К. Полупроводниковый фотопреобразователь солнечной энергии для космических аппаратов. Патент РФ № 2144718 от 20.01.2000.
10. Tabata T., Ito R. // An Algorithm for the Energy Deposition by Fast Electrons. Nuclear Science and Engineering 53, 226-239, 1974.
11. Галишев В.С. Вопросы теории многократного рассеяния частиц, М., 1972.
12. Доклад 37 МКРЕ, Тормозная способность электронов и позитронов. М., 1987.

УДК 662.289:678.063

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В СРЕДЕ MATLAB

Осипов Ю.Р., Шашерин Д.Н.

*Вологодский государственный технический университет, г. Вологда*

*e-mail: [dimon@vcent.rt.ru](mailto:dimon@vcent.rt.ru)*

Процесс вулканизации обкладок гуммированных объектов – один из наиболее сложных тепловых процессов, протекающих в изменяющихся во времени тепловых потоках и теплообмене между теплоносителем и нагреваемым объектом, зависящих от нестационарного распределенного поля температур в вулканизуемом объекте [1, 2]. Скорость прогрева обкладок резинометаллических изделий ограничена их тепловыми свойствами, обусловленными составом, конфигурациями и размерами объекта. При вулканизации в индукционный период происходит течение резиновых смесей и изменяется положение границ между слоями резинометаллического изделия; при нагреве покрытий вследствие экзотермичности реакции вулканизации выделяется теплота; тепловые свойства отдельных слоев и элементов резинометаллического изделия могут быть различными и зависящими от температуры.

При вулканизации обкладок гуммированных объектов необходимо обеспечить в минимальные сроки такое распределение и изменение температур по времени, при которых для данного типа обкладки, применяемых материалов и рецептур эластомеров сочетание комплекса основных свойств готового покрытия резинометаллического изделия наилучшие. Эти требования можно обеспечить выбором рационального теплового режима вулканизации обкладок.

Выбор режима вулканизации обкладок основан на анализе температурных полей в резинометаллическом изделии и на объективной оценке результатов их воздействия на процесс вулканизации. Наиболее интенсивно процесс вулканизации обкладок резинометаллических изделий в тепловой установке с псевдооживленным слоем инертного зернистого теплоносителя

происходит при гидродинамическом режиме, которому соответствуют скорости оживающего агента, обеспечивающие достижение максимального значения коэффициента теплоотдачи от псевдооживленного слоя к вулканизируемой поверхности [3, 4].

Рассчитать температурное поле составного тела с различными видами теплообмена на границах возможно, зачастую, только с помощью приближенных методов. Решена задача расчета температурного поля многослойной бесконечной пластины в приложении к конвективной вулканизации гуммировочных покрытий в псевдооживленном слое инертного зернистого теплоносителя с применением пакета прикладных программ MATLAB [8].

Математическая формулировка задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad T(x,0) = T_0 = const;$$

$$\alpha(T_{nc} - T_n(\tau)) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \lambda_i \cdot \frac{\partial T_{ni}}{\partial x} = \lambda_{i+1} \cdot \frac{\partial T_{ni+1}}{\partial x},$$

где  $T$  – температура;  $\tau$  – время;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $x$  – текущая координата;  $T_{nc}$  – температура вулканизирующей среды (псевдооживленного слоя – ПС);  $T_n$  – температура поверхности слоя;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена;  $T_{ni}$ ,  $T_{ni+1}$  – температура границы соответственно  $i$ -го и  $(i+1)$ -го слоя;  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{i+1}$  – коэффициенты теплопроводности соответственно  $i$ -го и  $(i+1)$ -го слоя.

Допущения, принятые при постановке задачи:

- подвод теплоты с торцов пластины не учитывается – рассматривается бесконечная пластина;
- между слоями имеет место идеальный тепловой контакт;
- температура среды не изменяется с течением времени;
- теплофизические параметры материала не зависят от температуры.

Вышеприведенные дифференциальные уравнения были аппроксимированы следующими приближенными разностными уравнениями [5, 7]:

Внутри материала:

$$\theta_{x,t+1} = \theta_{x,t} + A \cdot (\theta_{x-1,t} - 2 \cdot \theta_{x,t} + \theta_{x+1,t}), \quad A = \frac{\lambda_i}{\rho_i \cdot C_i \cdot \Delta x^2} \cdot \Delta \tau;$$

Граничные условия III рода (вулканизирующая среда – гуммируемое изделие):

$$\theta_{x,t} = \frac{1}{B_3} \cdot (B_1 \cdot \theta_{x-1,t} + B_2 \cdot T_{nc});$$

$$B_1 = \frac{\lambda_i}{\Delta x}; \quad B_2 = \alpha_i; \quad B_3 = B_1 + B_2;$$

Граничные условия IV рода (между слоями гуммируемого изделия):

$$\theta_{x,t} = C_2 \cdot \theta_{x-1,t} + C_3 \cdot \theta_{x+1,t};$$

$$C_1 = \lambda_i + \lambda_{i+1}; \quad C_2 = \frac{\lambda_i}{C_1}; \quad C_3 = \frac{\lambda_{i+1}}{C_1}.$$

где  $\rho_i$  – плотность  $i$ -го слоя;  $C_i$  – теплоемкость  $i$ -го слоя;  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности  $i$ -го слоя;  $\theta_{x,t}$  – приближенное значение температуры в момент времени  $t$  в точке с координатой  $x$ ;  $i$  – номер слоя;  $\Delta x$  – шаг по координате;  $\Delta \tau$  – шаг по времени.

Для решения данных разностных уравнений была составлена функция MATLAB, имеющая следующий интерфейс:

```
function [TField, XLabels, YLabels] = CalcTField(Tin, Tout, Alpha,
dX, dT, T, Layers)
% Вычисление температурного поля многослойной пластины
%
% Входные данные:
% Tin   - Начальная температура материала, К
% Tout  - Температура внешней среды, К
% Alpha - Коэффициент теплообмена, Вт/(м^2*К)
% dX    - Шаг по координате, мм
% dT    - Шаг по времени, с
% T     - Время исследования, с
% Layers - Массив слоев, каждый элемент которого
%          представляет собой struct (Lambda, Ro, C), где
%          Lambda – Коэффициент теплопроводности, Вт/(м*К)
%          Ro    - Плотность, кг/м^3
%          C     - Теплоемкость, Дж/(кг*К)

% Выходные данные:
% TFeild - Двумерная матрица, содержащая в каждой строке
%          распределение температуры по толщине материала в
%          определенный момент времени
% XLabels – Массив подписей для оси X (координаты)
% YLabels – Массив подписей для оси Y (время)
```

Данная функция возвращает температурное поле исследуемой пластины в заданных условиях в виде двумерной матрицы. Примеры графического представления рассчитанных данных

показан на рис. 1-3, на которых видно, насколько быстро прогреваются металлические слои по сравнению с эластомерными. Графики наглядны и позволяют визуально определить критические точки для продолжительности процесса термообработки гуммировочных покрытий. Расчет производится достаточно быстро, что позволяет использовать данную модель для вычислений в режиме реального и ускоренного времени.

Сравнение результатов работы функции с опытными данными по вулканизации гуммировочных обкладок в псевдоожиженном слое инертного зернистого теплоносителя [6] показало, что расчетные данные удовлетворительно совпадают с опытом. Заниженные расчетные температуры получаются вследствие того, что не учитывается экзотермичность реакции вулканизации.

*Рис. 1. Температурное поле многослойной резинометаллической пластины  
Сталь 40 (2 мм) + СКН-18 (10 мм) + Медь (2 мм) + НК (2 мм).*

*Рис. 2. Температурное поле многослойной резинометаллической пластины  
Сталь 40 (2 мм) + СКН-18 (2 мм) + Медь (1 мм) + НК+СКБ-1752 (2 мм).*

*Рис. 3. Температурное поле многослойной резинометаллической пластины  
Сталь 40 (2 мм)+СКБ-1854 (1.5 мм) + СКБ-1976 (1.5 мм) + СКБ-1976 (1.5 мм).*

После расчета температурных полей оценивается их действие, для чего желательно непосредственное измерение кинетики вулканизации покрытий при переменных температурах по программам, задаваемым по расчетам температур во времени для интересующих участков покрытия. Чем точнее определены условия теплообмена и учтены основные факторы, влияющие на тепловой процесс, чем правильнее модель воссоздает моделируемый объект, тем эффективней метод проектирования теплового режима вулканизации гуммировочных покрытий.

Так как точные расчеты, проводимые с учетом всех факторов (внутренние источники теплоты, подвижность границ и др.), достаточно трудоемки, целесообразно разделять проектирование режимов вулканизации на несколько периодов. Сначала на упрощенных моделях нужно исследовать необходимое число вариантов режимов и сделать предварительный выбор наиболее подходящих из них, а затем применить уточненные расчеты с целью выбора оптимального варианта.

### *Литература*

1. *Лукомская А.И., Баденков П.Ф., Кеperша Л.М.* Расчеты и прогнозирование режимов вулканизации резиновых изделий. М.:Химия, 1978. 280 с.
2. *Лукомская А.И., Баденков П.Ф., Кеperша Л.М.* Тепловые основы вулканизации резиновых изделий. М.:Химия, 1972. 359 с.
3. *Гвоздев В.Д., Сальников А.А.* Сушка картона в среде твердого псевдоожиженного теплоносителя. // Химия и химическая технология. Вып. III (XVI). М.:Недра, 1967. С. 168-181.
4. *Осипов Ю.Р.* О влиянии некоторых факторов на процесс горячего крепления обкладок к металлическим подложкам в псевдоожиженном слое. М., 1982, 9 с. Деп. в ЦИНТИхимнефтемаш 15.10.82, № 902.
5. Расчет температурных полей узлов энергетических установок. Под ред. Киселева И.Г. Л.: Машиностроение, 1978. 192 с.
6. *Осипов Ю.Р.* Термообработка и работоспособность покрытий гуммированных объектов. М.: Машиностроение, 1995. 232 с.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.:Наука, 1968. – 720 с.
8. *Коткин Г.Л., Черкасский В.С.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB: Учебное пособие. Новосибирск: Новосиб. ун-т., 2001. – 173 с.

УДК 517.977

## DIRECTSD 2.0 – ПАКЕТ ДЛЯ АНАЛИЗА И ПРЯМОГО СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Поляков К.Ю., Розенвассер Е.Н.

Государственный морской технический университет,

г. Санкт-Петербург

e-mail: [k10@smtu.ru](mailto:k10@smtu.ru)

### 1. Введение

В докладе рассматривается пакет *DirectSD 2.0*, который является расширением среды MATLAB и предназначен для анализа и прямого синтеза цифровых систем управления непрерывными динамическими объектами. Актуальность разработки этого пакета обусловлена тем, что, с одной стороны, большинство современных систем управления непрерывными объектами строится на основе цифровой техники и, с другой стороны, в настоящее время отсутствуют средства, предназначенные специально для автоматизации проектирования систем указанного класса.

Сложности в исследовании непрерывно-цифровых систем управления связаны с тем, что они являются гибридными по своей природе, объединяя непрерывные (аналоговые) и дискретные (цифровые) устройства. Это обстоятельство требует разработки специальных математических методов исследования, что является весьма нетривиальной задачей.

В настоящее время для практического синтеза цифровых алгоритмов управления непрерывными объектами используются три подхода: 1) дискретизация непрерывного регулятора; 2) синтез регулятора по дискретной модели системы; 3) прямой синтез цифрового регулятора для непрерывной системы. Первые два метода являются приближенными и имеют ограниченное применение. Наибольшее внимание в последние годы уделяется развитию методов прямого синтеза непрерывно-дискретных систем [1-4]. Широко известные в англоязычной литературе метод “лифтинга” [1] и родственный ему метод “FR-оператора” [2] используют переход в пространство состояний и построение эквивалентной дискретной системы для непрерывно-дискретной

задачи. Эти методы не позволяют анализировать структуру регулятора и неприменимы для систем, включающих звенья чистого запаздывания. От этих недостатков свободен *метод параметрических передаточных функций* (ППФ) [3-4], который позволяет исследовать непрерывно-дискретные системы в частотной области без каких-либо упрощений и аппроксимаций. По этим причинам метод ППФ был выбран в качестве теоретической основы для разработки пакета **DirectSD**. В то же время для реализации разработанных в [3-4] методик анализа и синтеза использовались также методы линейной алгебры [5], теория полиномиальных уравнений [6-7] и методы пространства состояний [8].

Пакет **DirectSD 2.0** позволяет решать следующие задачи анализа и синтеза для одноконтурных цифровых систем управления непрерывными объектами:

1. Стохастический анализ непрерывно-дискретных систем.
2. Синтез оптимальных цифровых алгоритмов восстановления зашумленных непрерывных сигналов.
3. Синтез оптимальных алгоритмов управления непрерывными объектами при случайных возмущениях.
4. Синтез оптимальных робастных непрерывно-цифровых систем по критерию минимума ассоциированной  $H_\infty$ -нормы.
5. Синтез оптимальных непрерывно-цифровых следящих систем.
6. Синтез оптимальных непрерывно-цифровых систем с двумя степенями свободы.
7. Синтез оптимальных систем с упреждающим входным сигналом (*preview*-управление).
8. Синтез квазиоптимальных цифровых регуляторов пониженного порядка с помощью генетических алгоритмов.

Первая версия пакета **DirectSD** была представлена в докладе [9]. В настоящем докладе рассматривается версия 2.0, в которой значительно расширен круг решаемых задач анализа и синтеза непрерывно-дискретных систем управления, а также использованы более совершенные вычислительные алгоритмы. Вычислительные процедуры, использованные в пакете **DirectSD 2.0**, основаны на полиномиальных методах синтеза оптимальных цифровых систем, предложенных в [10-15].

Объем файлов пакета составляет 900 Кб включая демонстрационные программы. Пакет тестировался на компьютерах с процессорами Pentium с использованием MATLAB версий 5.2 и 6.0 под управлением операционных систем Windows 95/98/NT/2000.

Пакет **DirectSD 2.0** требует наличия установленного пакета *Control Systems Toolbox*, поскольку использует объекты типов **ss**, **tf**

и **zpk**, а также функции этого пакета.

В докладе описываются теоретические основы и возможности практического применения пакета **DirectSD 2.0** для решения указанных выше задач.

В разд. 2 кратко описаны подходы к решению задач  $H_2$  и  $H_\infty$ -оптимизации непрерывно-дискретных систем в непрерывном времени на основе метода параметрических передаточных функций.

В разд. 3 рассматриваются задачи анализа синтеза оптимальных цифровых законов управления для разомкнутых и замкнутых непрерывно-дискретных систем при случайных возмущениях и методы их решения с помощью пакета **DirectSD**.

В разд. 4 излагаются методы решения задач анализа и синтеза оптимальных следящих систем по критериям минимума интегральной квадратичной ошибки и минимума  $H_\infty$ -нормы ассоциированной дискретной модели.

В разд. 5 кратко описаны демонстрационные программы, включенные в состав пакета **DirectSD 2.0**.

## 2. Теоретические основы метода ППФ

### Анализ и синтез при случайных возмущениях

Используя методы линейной теории цифрового управления в непрерывном времени [3-4], любой периодически нестационарной системе можно сопоставить единую системную характеристику – *параметрическую передаточную функцию*  $W(s,t)$ , которая представляет собой аналог обычной передаточной функции стационарных систем и обладает похожими свойствами. Так, дисперсия на выходе  $y$  такой системы при воздействии на вход единичного белого шума вычисляется по формуле

$$v_y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} W(-s,t)W(s,t) ds .$$

Как видно, дисперсия зависит от времени  $t$ . Так как функция  $W(s,t)$  периодична по времени с периодом системы  $T$  [3], дисперсия также является периодичной с периодом  $T$ .

Для интегральной оценки поведения системы в непрерывном времени естественно использовать *среднюю дисперсию*

$$\bar{v}_y = \frac{1}{T} \int_0^T v_y(t) dt .$$

Для того, чтобы при оптимизации учесть ограничения на сигнал управления, в качестве функции потерь используется комплексный показатель

$$J = \bar{v}_y + \rho^2 \bar{v}_u,$$

где  $\bar{v}_y$  и  $\bar{v}_u$  – средние дисперсии регулируемого сигнала и сигнала управления соответственно, а  $\rho^2$  – неотрицательный весовой коэффициент.

### **Анализ и синтез при детерминированных возмущениях**

Для исследования системы при детерминированных возмущениях применяется преобразование Лапласа в непрерывном времени [3-4]. Например, для простейшей замкнутой системы на рис. 1 преобразование Лапласа выхода  $y(t)$  равно [3]

$$Y(s) = \frac{F(s)C(s)D_H(T, s, +0)}{1 + C(s)D_{FG}(T, s, +0)},$$

где  $D_H(T, s, t)$  и  $D_{FG}(T, s, t)$  обозначают дискретные преобразования Лапласа для функций  $H(s)$  и  $F(s)G(s)$  соответственно, и  $C(s)$  – передаточная функция цифрового регулятора, которая фактически является рациональной функцией от  $\zeta = e^{-sT}$ .

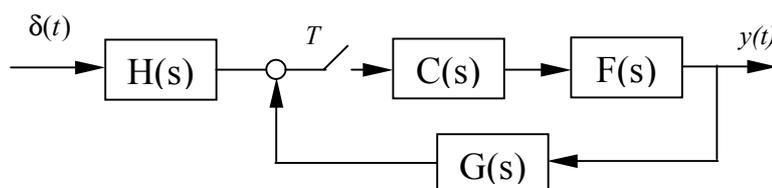


Рис. 1. Замкнутая непрерывно-дискретная система.

Если следящая система должна воспроизводить опорный сигнал  $\tilde{y}(t)$  и известно его изображение по Лапласу  $\tilde{Y}(s)$ , интегральная квадратическая ошибка в непрерывном времени может быть вычислена с помощью формулы Парсеваля

$$J = \int_0^{\infty} (y(t) - \tilde{y}(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} (Y(-s) - \tilde{Y}(-s))(Y(s) - \tilde{Y}(s)) ds$$

Приведенные выражения позволяют свести задачи оптимизации непрерывно-дискретных систем в непрерывном времени к эквивалентным дискретным задачам. В случае квадратичной задачи функционал качества сводится к виду

$$J_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left( A(\zeta)C(\zeta)C(\zeta^{-1}) + B(\zeta)C(\zeta) - B(\zeta^{-1})C(\zeta^{-1}) + E(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

где  $A(\zeta) = A(\zeta^{-1})$ ,  $B(\zeta)$  и  $E(\zeta) = E(\zeta^{-1})$  – известные дробно-рациональные функции.

### Ассоциированная $H_\infty$ -задача

Реализованная в пакете **DirectSD 2.0** робастная оптимизация непрерывно-дискретных систем основана на решении ассоциированной  $H_\infty$ -задачи, которая была предложена в [12] и затем рассматривалась также в [14,16-18]. Такой подход позволяет использовать для синтеза оптимальных робастных непрерывно-дискретных систем методику, аналогичную стохастическому подходу к  $H_\infty$ -оптимизации дискретных систем [7].

Пусть задан некоторый функционал вида

$$J_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \text{tr} X_2(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (1)$$

где  $X_2(\zeta)$  – положительно определенная дробно-рациональная функция, зависящая от неизвестной матрицы  $C(\zeta)$  (регулятора). Величину  $J_2$  можно рассматривать как квадрат  $H_2$ -нормы некоторой эквивалентной дискретной системы. Для такой системы задача робастной оптимизации сводится к минимизации функционала

$$J_{2\infty} = \|X_2(\zeta)\|_\infty = \sup_{|\zeta|=1} \|X_2(\zeta)\|_2 = \sup_{|\zeta|=1} \{\sigma_{\max}[X_2(\zeta)]\} \quad (2)$$

где  $\sigma_{\max}[\cdot]$  обозначает максимальное сингулярное число матрицы. Для дискретных систем такой подход применялся в [7].

На этой основе для любого функционала вида (1) может быть сформулирована следующая ассоциированная  $H_\infty$ -задача:

**Ассоциированная  $H_\infty$ -задача.** Найти такой регулятор  $C(\zeta)$ , который обеспечивает устойчивость замкнутой системы и минимум функционала (2).

Пакет **DirectSD 2.0** включает макросы, предназначенные для решения ассоциированной  $H_\infty$ -задачи для одномерных непрерывно-дискретных систем стабилизации и следящих систем.

### 3. Анализ и синтез непрерывно-дискретных систем при случайных возмущениях

#### Разомкнутые системы

На рис. 2 изображена структурная схема, соответствующая задачам непрерывно-дискретной фильтрации, предсказания и сглаживания. Задача системы – восстановить желаемое линейное преобразование  $Q(s)$  полезного сигнала  $x(t)$  при наличии аддитивной помехи  $n(t)$ . Стационарные независимые случайные сигналы  $x(t)$  и  $n(t)$  задаются как результат прохождения

независимых единичных белых шумов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  через формирующие фильтры с передаточными функциями  $F_x(s)$  и  $F_n(s)$  соответственно. Предполагается, что известны все непрерывные звенья непрерывно-цифрового фильтра ( $F_0(s)$ ,  $H(s)$  и  $F(s)$ ), а также чистое запаздывание  $\tau$ . Запаздывание в цепи идеального оператора на  $m$  интервалов квантования позволяет рассматривать задачи оптимальной фильтрации ( $m=0$ ), предсказания ( $m > 0$ ) и сглаживания ( $m < 0$ ).

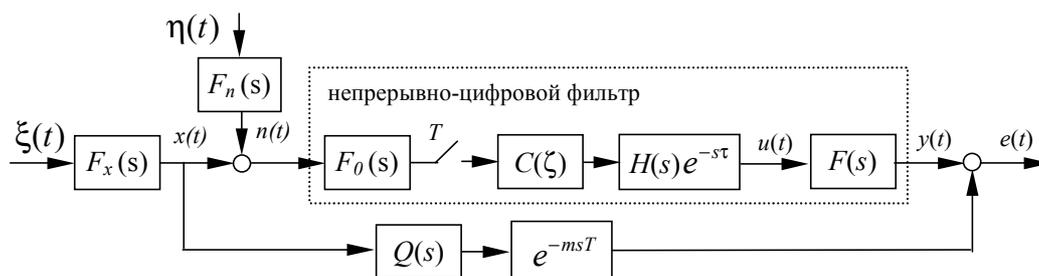


Рис. 2. Задача непрерывно-дискретной фильтрации.

Для оценки качества системы используется комплексный критерий

$$J_2 = \bar{v}_e + \bar{v}_u \quad (3)$$

где  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_u$  – средние дисперсии непрерывных сигналов  $z_e(t)$  и  $z_u(t)$  (см. рис. 3). Здесь устойчивые весовые фильтры с передаточными функциями  $V_e(s)$  и  $V_u(s)$  служат для обеспечения компромисса между точностью восстановления сигнала и затратами на управление с учетом частотных свойств сигналов  $e(t)$  и  $u(t)$ .

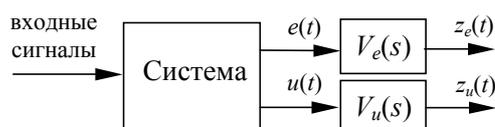


Рис. 3. Сигналы, используемые для оценки качества системы.

Вычисление величин  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_u$  выполняется с помощью макроса **sdfilvar**, вызов которого имеет вид

**[ve,vu]=sdfilvar(F,H,Fo,Q,Fx,Fn,Ve,Vu,C,T,tau,m );**

Здесь передаточные функции  $F(s)$ ,  $H(s)$ ,  $F_0(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $F_x(s)$ ,  $F_n(s)$ ,  $V_e(s)$ ,  $V_u(s)$  задаются в виде моделей линейных стационарных непрерывных систем, поддерживаемых в пакете *Control Toolbox* (в виде передаточных функций, представления в пространстве состояний, множества нулей и полюсов). Передаточная функция

оптимального регулятора  $C(z)$  задается как модель стационарной дискретной системы (в плоскости переменной  $z = e^{sT}$ ). Параметр  $T$  обозначает интервал квантования,  $\tau$  – чистое запаздывание и целое число  $m$  – запаздывание в идеальном операторе.

Вызов этой же функции с дополнительным параметром  $t$  позволяет вычислить *мгновенные дисперсии*  $v_e(t)$  и  $v_u(t)$ :

**[vet,vut]=sdfilvar(F,H,Fo,Q,Fx,Fn,Ve,Vu,C,T,tau,m,t);**

Параметр  $t$  может быть вектором (при этом возвращаются векторы соответствующих мгновенных дисперсий при всех заданных  $t$ ).

Для синтеза оптимального цифрового фильтра  $C(\zeta)$ , минимизирующего значение функции потерь (3), используется макрос **sdfilter**:

**[C,J]=sdfilter(F,H,Fo,Q,Fx,Fn,Ve,Vu,C,T,tau,m);**

который возвращает дискретную передаточную функцию оптимального цифрового фильтра и оптимальное значение функции потерь (3).

### **Замкнутые системы**

На рис. 4 изображена структурная схема, соответствующая задаче цифровой стабилизации непрерывного объекта. Задача системы – снижение нормы сигнала ошибки управления  $e(t)$  при ограничении на энергию управления  $u(t)$ . Стационарные независимые случайные сигналы – внешнее возмущение  $w(t)$  и ошибка измерения  $m(t)$  – задаются как результат прохождения независимых единичных белых шумов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  через формирующие фильтры с передаточными функциями  $F_w(s)$  и  $F_m(s)$  соответственно. Предполагается, что известны все непрерывные звенья объекта ( $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $H(s)$  и  $G(s)$ ), а также чистое запаздывание в объекте  $\tau_1$  и обратной связи  $\tau_2$ .

Для оценки качества системы в непрерывном времени используется критерий (3), включающий средние дисперсии сигналов  $z_e(t)$  и  $z_u(t)$  (см. рис. 3).

Вычисление величин  $\bar{v}_e$  и  $\bar{v}_u$  выполняется с помощью макроса **sdh2var**, вызов которого имеет вид

**[ve,vu]=sdh2var(F1,F2,H,G,Fw,Fm,Ve,Vu,C,T,tau1,tau2);**

Здесь передаточные непрерывных (дискретных) звеньев задаются в виде моделей линейных непрерывных (дискретных) систем, поддерживаемых в пакете *Control Toolbox*. Параметры  $\tau_1$  и  $\tau_2$  обозначают величины запаздывания в объекте  $\tau_1$  и обратной связи  $\tau_2$ .

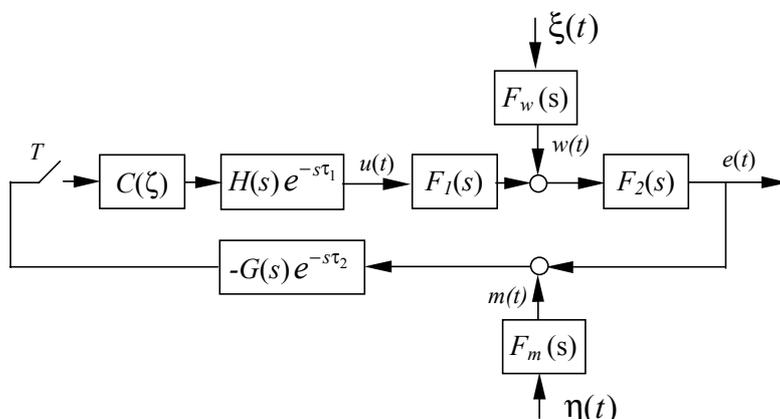


Рис. 4. Задача цифровой стабилизации.

Вызов этой же функции с дополнительным параметром  $t$  позволяет вычислить *мгновенные дисперсии*  $v_e(t)$  и  $v_u(t)$ :

$$[ve,vu]=sdh2var(F1,F2,H,G,Fw,Fm,Ve,Vu,C,T,tau1,tau2,t);$$

Параметр  $t$  может быть вектором (при этом возвращаются векторы соответствующих мгновенных дисперсий при всех заданных  $t$ ).

Для синтеза оптимального цифрового фильтра  $C(\zeta)$ , минимизирующего значение функции потерь (3), используется макрос **sdh2**:

$$[C,P]=sdh2(F1,F2,H,G,Fw,Fm,Ve,Vu,T,tau1,tau2);$$

который возвращает дискретную передаточную функцию оптимального цифрового регулятора и полюса оптимальной замкнутой системы.

Макрос **sdhinf** используется для решения ассоциированной  $H_\infty$ -задачи для системы, изображенной на рис. 4:

$$[C,P,lam]=sdhinf(F1,F2,H,G,Fw,Fm,Ve,Vu,T,tau1,tau2);$$

Возвращаемое значение  $lam$  представляет собой значение ассоциированной  $H_\infty$ -нормы (2).

#### 4. Анализ и синтез непрерывно-дискретных систем при детерминированных возмущениях

##### Разомкнутые системы

На рис. 5 изображена структурная разомкнутой непрерывно-дискретной системы, на вход которой с запаздыванием  $\tau_0$  поступает детерминированный сигнал  $r(t)$ , заданный в виде изображения  $R(s)$  (здесь  $\delta(t)$  обозначает единичный импульс). Задача системы – отработать как можно более точно желаемый выходной сигнал  $\tilde{y}(t)$ , который задан передаточной функцией  $Q_y(s)$  (рис. 6). Кроме того, чтобы учесть ограничения на сигнал управления  $u(t)$ , вводится желаемый сигнал управления  $\tilde{u}(t)$ , который задан передаточной функцией  $Q_u(s)$ .

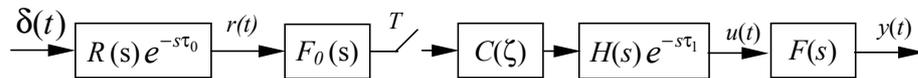


Рис. 5. Разомкнутая цифровая система.

Выбор функций  $Q_y(s)$  и  $Q_u(s)$ , а также весовых функций  $V_e(s)$  и  $V_u(s)$  не является произвольным, так как необходимо обеспечить выполнение условий

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_e(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_u(t) = 0$$

Подробнее этот вопрос рассмотрен в [14].

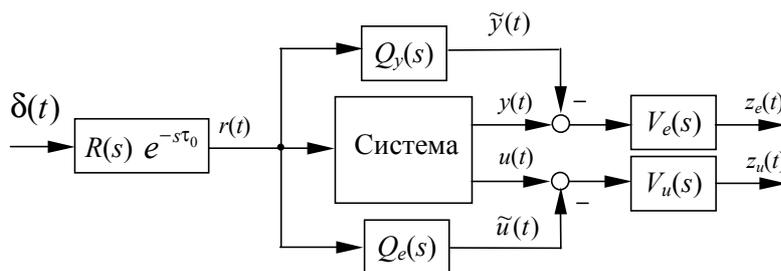


Рис. 6. Сигналы, используемые для оценки качества системы.

Для оценки качества системы в непрерывном времени используется сумма интегральных квадратических ошибок

$$J_2 = J_e + J_u, \quad (4)$$

$$J_e = \int_0^{\infty} z_e^2(t) dt, \quad J_u = \int_0^{\infty} z_u^2(t) dt.$$

Макрос **sdl2oerr** входящий в состав пакета **DirectSD 2.0**, служит для вычисления величин  $J_e$  и  $J_u$  для системы, изображенной

на рис. 5-6:

$$[J_e, J_u] = \text{sdl2oerr}(F, H, F_0, Q_e, Q_u, R, V_e, V_u, C, T, \tau_0, \tau_1);$$

Передаточные функции непрерывных (дискретных) звеньев задаются в виде моделей линейных стационарных непрерывных (дискретных) систем, поддерживаемых в пакете *Control Toolbox*.

Функция **sdl2o** позволяет построить устойчивый цифровой регулятор, обеспечивающий минимальное значение функции потерь (4):

$$C = \text{sdl2o}(F, H, F_0, Q_e, Q_u, R, V_e, V_u, T, \tau_0, \tau_1)$$

### Замкнутые системы

На рис. 7 изображена структурная схема замкнутой непрерывно-дискретной следящей системы. Для оценки качества системы применяется критерий (4), использующий непрерывные сигналы, показанные на рис. 6. В отличие от разомкнутой системы на рис. 5, замкнутая цифровая следящая система включает отрицательную обратную связь с динамической передаточной функцией  $G(s)$  и звеном чистого запаздывания на  $\tau_2$ .

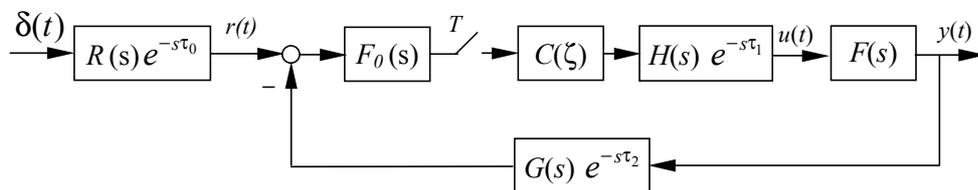


Рис. 7. Замкнутая цифровая следящая система.

Для вычисления величин  $J_e$  и  $J_u$  в (4) служит макрос **sdl2err**:

$$[J_e, J_u] = \text{sdl2err}(F, H, G, F_0, Q_e, Q_u, R, V_e, V_u, C, T, \tau_0, \tau_1, \tau_2);$$

Передаточные функции непрерывных (дискретных) звеньев задаются в виде моделей линейных стационарных непрерывных (дискретных) систем, поддерживаемых в пакете *Control Toolbox*.

Функция **sdl2** позволяет построить стабилизирующий цифровой регулятор, обеспечивающий минимальное значение функции потерь (4) для замкнутой системы:

$$[C, P] = \text{sdl2}(F, H, G, F_0, Q_e, Q_u, R, V_e, V_u, T, \tau_0, \tau_1, \tau_2);$$

Этот макрос возвращает дискретную передаточную функцию оптимального цифрового регулятора и полюса оптимальной замкнутой системы.

Макрос **sdtrinf** предназначен для синтеза робастных следящих систем путем минимизации ассоциированной  $H_\infty$ -нормы для системы, изображенной на рис. 4:

$$[C,P,lam]=sdtrinf(F,H,G,Fo,Qe,Qu,R,Ve,Vu,T,tau0,tau1,tau2);$$

Выходными параметрами являются дискретная передаточная функция оптимального цифрового регулятора, полюса оптимальной замкнутой системы и значение ассоциированной  $H_\infty$ -нормы (2).

### Системы с двумя степенями свободы

Классическая схема одноконтурной следящей системы с одним регулятором обладает существенным недостатком, который связан с тем, что при синтезе регулятора необходим компромисс между обеспечением достаточного запаса устойчивости контура и малой ошибки слежения за опорным сигналом. Введение в систему второго регулятора, который не входит в контур, позволяет независимо обеспечить хорошие робастные свойства контура (выбрав соответствующим образом регулятор в контуре) и малую ошибку слежения (с помощью корректирующего регулятора). Такие системы получили название *систем с двумя степенями свободы* [7,19]. Непрерывно-дискретные системы с двумя степенями свободы были впервые рассмотрены в [15], где дано решение задачи оптимального синтеза для одномерных систем этого класса на основе линейной теории цифрового управления [3-4] и метода полиномиальных уравнений.

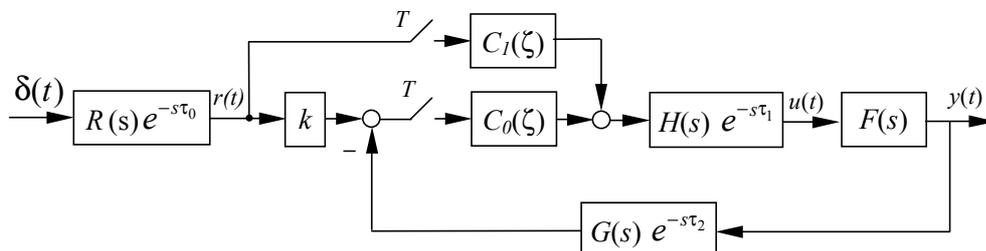


Рис. 8. Замкнутая цифровая система с двумя степенями свободы.

Структурная схема непрерывно-дискретной системы с двумя степенями свободы показана на рис. 8. Пусть регулятор  $C_0$ , находящийся внутри контура управления, выбран заранее так, что робастные свойства контура удовлетворяют заданным требованиям. Тогда за счет выбора регулятора  $C_1$ , который находится в прямой

цепи и не влияет на устойчивость контура, можно добиться уменьшения обобщенной интегральной квадратической ошибки слежения за опорным сигналом (4).

В пакете *DirectSD 2.0* реализован полиномиальный метод синтеза оптимальных корректирующих регуляторов, изложенный в [15]. Предусмотрена возможность анализа и синтеза как классических систем с двумя степенями свободы (при  $k=0$  на рис. 8), так и систем с  $2\frac{1}{2}$  степенями свободы (при  $k=1$ ) [7,20].

Макрос **sd2dofer** служит для вычисления величин  $J_e$  и  $J_u$  в критерии (4) для системы, показанной на рис. 8:

$$[J_e, J_u] = \text{sd}2\text{dofer}(F, H, G, C0, C1, Qe, Qu, R, Ve, Vu, \dots \\ k, T, \tau_0, \tau_1, \tau_2);$$

Передаточные функции непрерывных (дискретных) звеньев задаются в виде моделей линейных стационарных непрерывных (дискретных) систем, поддерживаемых в пакете *Control Toolbox*.

Функция **sd2dof** позволяет построить корректирующий цифровой регулятор, обеспечивающий минимальное значение функции потерь (4) для рассматриваемой системы:

$$C1 = \text{sd}2\text{dof}(F, H, G, C0, Qe, Qu, R, Ve, Vu, k, T, \tau_0, \tau_1, \tau_2);$$

### *Демонстрационные программы*

В состав пакета *DirectSD 2.0* включены следующие демонстрационные программы:

#### *Разомкнутые системы*

<b>demofil</b>	Анализ и оптимальный синтез непрерывно-цифровых фильтров для восстановления непрерывных сигналов
<b>demol2o</b>	Анализ и оптимальный синтез непрерывно-цифровых систем при детерминированных возмущениях
<b>demol2op</b>	Анализ и оптимальный синтез непрерывно-цифровых разомкнутых систем при детерминированных возмущениях с упреждающим сигналом

#### *Замкнутые системы*

<b>demoh2</b>	Анализ и оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых систем стабилизации при случайных возмущениях
---------------	---

<b>demohinf</b>	Оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых систем по критерию минимума ассоциированной $H_\infty$ -нормы эквивалентной системы
<b>demol2</b>	Анализ и оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых систем при детерминированных возмущениях
<b>demol2p</b>	Анализ и оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых систем при детерминированных возмущениях с упреждающим сигналом
<b>demotinf</b>	Оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых следящих систем по критерию минимума ассоциированной $H_\infty$ -нормы эквивалентной системы
<b>demo2dof</b>	Оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых систем с двумя степенями свободы
<b>demoh2l2</b>	Оптимальный синтез непрерывно-цифровых замкнутых систем по комбинированному $H_2/L_2$ -критерию
<b>demoqh2</b>	Синтез квазиоптимальных непрерывно-цифровых систем стабилизации с регуляторами пониженного порядка, обеспечивающими заданное расположение полюсов замкнутой системы
<b>demoql2</b>	Синтез квазиоптимальных непрерывно-цифровых следящих систем с регуляторами пониженного порядка, обеспечивающими заданное расположение полюсов замкнутой системы
<b>demogah2</b>	Синтез квазиоптимальных непрерывно-цифровых систем стабилизации с регуляторами пониженного порядка методом генетических алгоритмов
<b>Demogal2</b>	Синтез квазиоптимальных непрерывно-цифровых следящих систем с регуляторами пониженного порядка методом генетических алгоритмов

### Заключение

В докладе рассматривается пакет *DirectSD 2.0* для среды MATLAB, предназначенный для анализа и прямого синтеза непрерывно-дискретных систем управления на основе линейной теории цифрового управления в непрерывном времени. Теоретические методы и вычислительные алгоритмы, использованные в пакете, позволяют исследовать гибридные системы указанного класса без каких-либо упрощений и аппроксимаций.

### Литература

1. *Chen T., Francis B.A.*, Optimal Sampled-Data Control Systems, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 1995.
2. *Hagiwara T., Araki M.* FR-operator approach to the  $H_2$  analysis and synthesis of sampled-data systems // IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-40. 1995. N. 5, P. 1411-1421.
3. *Розенвассер Е.Н.* Линейная теория цифрового управления в непрерывном времени. М.: Наука, 1994. 455 с.
4. *Rosenwasser E., Lampe B.* Computer-Controlled Systems: Analysis and Design with Process-oriented models. London: Springer. 2000.
5. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск, Научная книга. 1997.
6. *Kučera V.*, Discrete Linear Control. New York: Wiley. 1979.
7. *Grimble M.J.*, Robust Industrial Control, Prentice Hall, Hemel Hempstead, 1994.
8. *Zhou K., Doyle J., Glover K.* Robust and Optimal Control, NJ: Prentice Hall, 1996.
9. *Polyakov K., Rosenwasser E., Lampe B.* DirectSD - a toolbox for direct design of sampled-data systems // Proc. IEEE Intern. Symp. CACSD'99. Kohala Coast. USA. 1999. P. 357-362.
10. *Поляков К.Ю.* Алгоритм синтеза цифровых систем управления на основе метода параметрических передаточных функций // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 3. С. 32–39.
11. *Поляков К.Ю.* Полиномиальный синтез цифровых систем управления. I. Квадратичная оптимизация // Автоматика и телемеханика. 1998. № 10. С. 76–89.
12. *Поляков К.Ю.* Полиномиальный синтез цифровых систем управления. II. Робастная оптимизация // Автоматика и телемеханика. 1998. № 12. С. 94–108.
13. *Поляков К.Ю.* Полиномиальный синтез оптимальных цифровых

- следящих систем. I. Квадратичная оптимизация // Автоматика и телемеханика. 2001. № 2. С. 149–162.
14. Поляков К.Ю. Полиномиальный синтез оптимальных цифровых следящих систем. II. Робастная оптимизация // Автоматика и телемеханика. 2001. № 3. С. 94–107.
15. Поляков К.Ю. Синтез оптимальных цифровых систем с двумя степенями свободы // Автоматика и телемеханика. 2001. № 6. с. 85–94.
16. Polyakov K., Rosenwasser E., Lampe B. Associated  $H_\infty$ -problem for sampled-data systems // Proc. Conf. Adaptive Control. St. Petersburg. Sept. 5-9. 1999. p. 168-171.
17. Polyakov K., Rosenwasser E., Lampe B. Associated  $H_\infty$ -problem for sampled-data systems // Proc. 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design. Prague. June 21.-23. 2000. p. 1311-1316.
18. Polyakov K., Rosenwasser E., Lampe B. Polynomial solution to  $H_\infty$ -problem for sampled-data systems // Proc. Conf. Process Control and Instrumentation. Glasgow. July 26.-28. 2000. p. 375-380.
19. Youla D. C., Bongiorno J. J. Jr. A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf design // IEEE Trans. Automat. Contr. 1985. Vol. AC-30. No. 7. P. 652–665.
20. Grimble M. J. Two and a half degrees of freedom LQG controller and application to wind turbines // IEEE Trans. Automat. Contr. 1994. Vol. AC-39. No. 1. P. 122–127.

УДК 621.391:396

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РЕКУРРЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ МАРКОВСКИХ ПОЛЕЙ С ГРАНИЦАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В РАМКАХ СРЕДЫ MATLAB**

Сирота А.А., Лантюхов М.Н.

*Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: [lmn78@mail.ru](mailto:lmn78@mail.ru)*

Во многих современных системах сбора и обработки информации решается задача оценивания случайных полей, описывающих изображения, наблюдаемые первичными датчиками в различных участках спектра электромагнитных волн в присутствии помех естественного и искусственного происхождения [1-3]. Для обработки таких полей весьма эффективным в вычислительном отношении, а также с позиций организации последовательного (построчного, покадрового) наблюдения является использование рекуррентных алгоритмов линейной и нелинейной дискретной фильтрации калмановского типа [2, 3], реализующих оценку полей в присутствии. Теоретической основой для построения таких алгоритмов является использование каузальных моделей, обеспечивающих марковский характер описания процесса формирования случайного поля при определенной последовательности просмотра элементов координатной сетки. В известных работах задача синтеза алгоритмов фильтрации как правило решалась для полей, заданных на двумерных сетках прямоугольной формы.

В тоже время возникает целый ряд задач, требующих реализации алгоритмов рекуррентной фильтрации для полей с границами произвольной формы, внутренними областями закрытия изображений или нескольких полей, разделенных границей произвольной (случайной) формы. Решение таких задач отвечает практическим условиям функционирования систем дистанционного мониторинга при анализе состояний пространственно распределенных по поверхности земли объектов.

В связи с тем, что построение алгоритмов рекуррентной фильтрации случайных полей с указанными особенностями, а так

же проведение модельных экспериментов по анализу характеристик этих алгоритмов, предполагает интенсивные матричные вычисления, наиболее естественным для их реализации стал выбор среды MATLAB. Переход в среду MATLAB позволяет легко оперировать с матрицами, в то время как реализация данных алгоритмов в других языках программирования требует написания множества дополнительных процедур, оптимизация которых требует значительных усилий. Еще одним преимуществом является возможность представить синтезируемые алгоритмы в естественном виде, что резко сокращает объем текста программ и облегчает их отладку.

В классической постановке исходное изображение, определяемое как реализация марковского разделимого случайного поля  $\lambda(i, j)$  ( $M[\lambda(i, j)] = 0$ ,  $M[\lambda(i, j)] = \sigma_\lambda^2$ ),  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, M}$  заданного на двумерной сетке прямоугольной формы, описывается уравнением пространственной динамики известного вида [1, 2]. При задании поля на двумерной сетке с границами произвольной формы эти уравнения, с учетом различных ситуаций сочетания положения элементов границы для соседних строк (см. рис. 1) и граничных условий на плоскости XOY, определяются в дискретных точках уравнениями вида

$$\lambda(i, l) = \rho_x \lambda(i-1, l) + \gamma_x u(i, l); \quad (1)$$

- a)  $\lambda(i l, j) = \rho_y \lambda(i l, j-1) + \lambda_y u(i l, j);$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i-1, j) + \rho_y \lambda(i, j-1) - \rho_x \rho_y \lambda(i-1, j-1) + \gamma_{xy} u(i, j), \quad i = i l + 1, \dots, j l;$
- б)  $\lambda(i 0, j) = \rho_y \lambda(i 0, j-1) + \gamma_y u(i 0, j);$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i+1, j) + \gamma_x u(i, j), \quad i = i 0 - 1, \dots, i l;$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i-1, j) + \rho_y \lambda(i, j-1) - \rho_x \rho_y \lambda(i-1, j-1) + \gamma_{xy} u(i, j), \quad i = i 0 + 1, \dots, j l;$
- в)  $\lambda(i l, j) = \rho_y \lambda(i l, j-1) + \gamma_y u(i l, j);$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i-1, j) + \rho_y \lambda(i, j-1) - \rho_x \rho_y \lambda(i-1, j-1) + \gamma_{xy} u(i, j), \quad i = i l, \dots, j 0;$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i-1, j) + \gamma_x u(i, j), \quad i = j 0 + 1, \dots, j l;$
- г)  $\lambda(i 0, j) = \rho_y \lambda(i 0, j-1) + \lambda_y u(i 0, j);$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i+1, j) + \lambda_x u(i, j), \quad i = i 0 - 1, \dots, i l;$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i-1, j) + \rho_y \lambda(i, j-1) - \rho_x \rho_y \lambda(i-1, j-1) + \gamma_{xy} u(i, j), \quad i = i 0 + 1, \dots, j 0;$   
 $\lambda(i, j) = \rho_x \lambda(i-1, j) + \gamma_x u(i, j), \quad i = j 0, \dots, j l, \quad j = \overline{1, M},$

где  $l \leq i 0 < N l$ ,  $N 2 < j 0 \leq N$  – первый и последний элементы в  $j-1$ -ой строке, а  $i l$  и  $j l$  – соответственно в  $j$ -ой строке,  $u(i, j)$  – независимые в различных точках координатной сетки и в общем

случае  $(M[u(i, j)] = 0, M[u^2(i, j)] = 1)$ . Коэффициенты уравнений в (1) определяются функциями вида:  $\rho_x = \exp(-\alpha_x \Delta x)$ ,  $\rho_y = \exp(-\alpha_y \Delta y)$ ,  $\gamma_x = \sigma_\lambda (1 - \rho_x^2)^{1/2}$ ,  $\gamma_y = \sigma_\lambda (1 - \rho_y^2)^{1/2}$ ,  $\gamma_{xy} = \gamma_x \gamma_y / \sigma_\lambda$ , где  $\alpha_x, \alpha_y$  – величины, обратно пропорциональные радиусам пространственной корреляции поля;  $\Delta x, \Delta y$  – дискреты задания координатной сетки.

Аналогичным, по сути образом, в пределах общей области определения исходного поля, могут быть заданы участки локальной неоднородности (пораженные участки), характеризующиеся закрытием для наблюдения внутренних областей изображения или два разделенных общей произвольной границей поля  $y_{1,2}(i, j)$  (см. рис. 2). При этом получаются уравнения сходного с (1) вида, для которых граничные условия определяются формой закрытых для наблюдения участков или формой границы раздела полей.

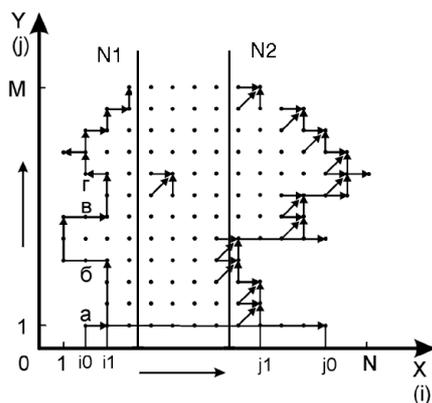


Рис. 1. Поле с произвольной границей.

Задача оценивания случайного поля, описываемого (1) рассматривается для аддитивной в каждой точке модели наблюдений

$$z(i, j) = h(i, j)\lambda(i, j) + v(i, j), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2)$$

где  $h(i, j)$  – известные коэффициенты;  $v(i, j)$  – белое в общем случае негауссовское поле шума ( $M[v^2(i, j)] = \sigma_z^2$ ). Наблюдения проводятся построчно и поступают на обработку в виде реализаций вектора  $z_j = (z(i1, j) \dots z(j1, j))^T$ .



$$\begin{aligned}
F_0(N, \rho_y) &= \begin{bmatrix} \rho_y & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \rho_y \end{bmatrix}, \\
G_0(N, \rho_x, \gamma_y, \gamma_{xy}) &= \begin{bmatrix} \gamma_y & & & 0 \\ \gamma_y \rho_x & \gamma_{xy} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \gamma_y \rho_x^{n-1} & \gamma_{xy} \rho_x^{n-2} & \cdots & \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \\
G_1(N) &= \begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_x \rho_x & \cdots & \gamma_x \rho_x^{n-1} \\ & \gamma_x & \cdots & \gamma_x \rho_x^{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \gamma_x \end{bmatrix}, \\
G_2(N, m) &= \begin{bmatrix} \gamma_y \rho_x^m & \gamma_{xy} \rho_x^{m-1} & \cdots & \gamma_{xy} \rho_x \\ \gamma_y \rho_x^{m+1} & \gamma_{xy} \rho_x^m & \cdots & \gamma_{xy} \rho_x^2 \\ \gamma_y \rho_x^{m+n-1} & \gamma_{xy} \rho_x^{m+n-2} & \cdots & \gamma_y \rho_x^n \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4}$$

На основе (1)-(4) может быть синтезирован рекуррентный оптимальный фильтр оценивания расширенного вектора состояний, имеющий стандартную форму калмановского фильтра с тем только отличием, что размерности векторов состояний и наблюдений, а также структура соответствующих преобразующих матриц меняется от шага к шагу

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_{j+1/j} &= F_j(i1, j1, i0, j0) \tilde{\lambda}_{j/j}, \quad \lambda_{j/j} = \tilde{\lambda}_{j/j-1} + W_j [z_j - H_j(i1, j1) \tilde{\lambda}_{j/j-1}], \\
W_j &= V_j U_j^{-1}, \quad V_j = P_{j/j-1} H_j^T(i1, j1) U_j^{-1}, \\
U_j &= H(i1, j1) P_{j/j-1} H_j^T(i1, j1) + I \sigma_z^2, \quad P_{j/j} = P_{j/j-1} - W_j V_j^T, \\
P_{j+1/j} &= F_j(i1, j1, i0, j0) P_{j/j} F_j^T(i1, j1, i0, j0) + G_j(i1, j1, i0, j0) G_j^T(i1, j1, i0, j0).
\end{aligned} \tag{5}$$

По аналогичной схеме могут быть решены задачи оценки поля с внутренними пораженными участками, а также оценки полей, имеющих общую известного вида границу, изменяющуюся по произвольному закону.

К данному классу задач относится также задача совместного оценивания полей и определения границы между ними, когда и форма границы неизвестна, а определяется некоторым вероятностным законом положения элементов в строке изображения. Пусть в пределах заданной области имеется два разделенных общей границей поля  $y_{1,2}(i, j)$  (см. рис. 2). Для их описания в каждой точке используем векторы  $x_1(i, j) = (\lambda_1(i, j), m_1(i, j))^T$ ,  $x_2(i, j) = (\lambda_2(i, j), m_2(i, j))^T$ , где  $m_{1,2}(i,$

$j) = m_{1,2}$  – неизвестные значения постоянных составляющих ( $M[m_{1,2}] = m_{1,2}^0, D[m_{1,2}] = \sigma_{m_{1,2}}^2$ ), а  $\lambda_{1,2}(i, j)$  – реализации марковских разделимых случайных полей ( $M[\lambda_{1,2}(i, j)] = 0, M[\lambda_{1,2}^2(i, j)] = \sigma_{\lambda_{1,2}}^2$ ), описывающие стохастические составляющие результирующих полей  $y_{1,2}(i, j) = m_{1,2}(i, j) + \lambda_{1,2}(i, j)$ . Корреляционные характеристики полей задаются соответственно коэффициентами:  $\rho_{x1,2}, \rho_{y1,2}, \gamma_{x1,2}, \gamma_{y1,2}, \gamma_{xy1,2}$ . Граница раздела результирующих полей изменяется по произвольной заранее неизвестной зависимости  $i_j = f(j), j = \overline{1, M}$ . Относительно закона изменения границы предполагается, что расположение границы независимо от строки к строке и имеет равновероятный характер  $P_r(i_j) = 1/(N2 - N1 + 1)$  в пределах элементов  $N1$  и  $N2$ . Уравнения для  $\lambda_{1,2}(i, j)$  при конкретной форме границы имеют вид аналогичный (1) с граничными условиями, определенными в соответствии с заданием  $i0, j0, i1, j1$ .

В работе [4] для данной постановки реализован алгоритм оптимальной, по отношению к полученной в условном «прошлом» совокупности наблюдений, обработки в виде адаптивного разделенного алгоритма фильтрации. Его особенностью является необходимость реализации алгоритмов линейной (калмановской) фильтрации и вычисления весовых коэффициентов для всех возможных гипотез о конкретной форме границы. Это является существенным недостатком данного алгоритма, так как число гипотез растет по факториальному закону  $N_j \sim (N2 - N1)^j$ . Так же к недостаткам следует отнести необходимость расчета на каждом шаге множества матриц преобразования случайных векторов, имеющих достаточно сложную структуру и зависящих от формы границы. Это резко сужает возможности практического использования такого алгоритма и требует рассмотрения возможности реализации квазиоптимального (оптимального в классе линейных) алгоритма фильтрации, имеющего существенно более простую структуру.

В основу подхода при анализе такого алгоритма предлагается положить специальное «конфликтное» представление процесса наблюдения двух случайных полей, разделенных границей случайной формы. При этом возникающая ситуация интерпретируется как ситуация частичного взаимного «закрытия» краевых компонент двух случайных полей, которые по строке описываются векторами фиксированной размерности

$x_{1j}^* = (\lambda_1(1, j), \dots, \lambda_1(N, j), m_1)^T$ ,  $x_{2j}^* = (\lambda_2(1, j), \dots, \lambda_2(N, j), m_2)^T$  и соответственно векторами,  $y_{1,2j}^* = (y_{1,2}^*(1, j), \dots, y_{1,2}^*(N, j))$ ,  $y_{1,2}^*(i, j) = x_{1,2}^*(i, j) + m_{1,2}$ . Их стохастические компоненты изменяются в соответствии с уравнениями для разделимых марковских полей стандартного вида [1]

$$\lambda_{1,2j+1} = F_0^{(1,2)}(N, \rho_x^{(1,2)}) \lambda_{1,2j} + G_0^{(1,2)}(N, \rho_x^{(1,2)}, \gamma_x^{(1,2)}, \gamma_{xy}^{(1,2)}) u_j, \quad (6)$$

где  $u_j$  – как и ранее вектор возмущений размерности  $N$ . А матрицы  $F_0^{(1,2)}(N, \rho_x^{(1,2)})$  и  $G_0^{(1,2)}(N, \rho_x^{(1,2)}, \gamma_x^{(1,2)}, \gamma_{xy}^{(1,2)})$  имеют вид аналогичный (4).

Уравнение наблюдений вектора  $z_j = (z(1, j), \dots, z(N, j))^T$  в такой интерпретации может быть записано в виде

$$z_j = A_j y_{1j}^* + (I - A_j) y_{2j}^* + v_j, \quad v_j = (v(1, j), \dots, v(N, j))^T, \quad (7)$$

где матрица  $A_j$  определяется следующим образом:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{Nj} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = 1, \quad 1 \leq j \leq i; \quad a_{ij} = 0, \quad i < j \leq N.$$

Случайные диагональные коэффициенты  $A_j$ , принимая значения 0 или 1, отражают факт наличия частичной наблюдаемости результирующих полей  $y_{1j}^*, y_{2j}^*$  соответственно в левой и правой части изображения и их взаимное закрытие, область которого определяется границей между ними. Считается, что элементы  $A_j$  не зависят при таком рассмотрении от  $y_{1j}^*, y_{2j}^*$ . Вводя расширенный вектор состояний  $x_j^* = (x_{1j}^{*m}, x_{2j}^{*m})^m$ , перепишем для него с учетом соответствующего расширения вектора возмущений  $u_j^*$  уравнения состояний и наблюдений в виде

$$x_{j+1}^* = F_j^* x_j^* + G_j^* u_j, \quad z_j = H_j^* x_j^* + v_j$$

$$F_{j+1}^* = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} F_0^{(1)}(N) & 0 & & 0 \\ \hline 0 & I & & \\ \hline & & F_0^{(2)}(N) & 0 \\ \hline 0 & & 0 & I \end{array} \right], \quad G_j^* = \left[ \begin{array}{c|c} G_0^{(1)}(N) & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & G_0^{(2)}(N) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \quad (8)$$

$$H_j^* = [A_j H_j^0 \mid (I - A_j) H_j^0, H_j^0], \quad H_j^0 = \begin{bmatrix} h(1, j) & & 0 & h(1, j) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & h(N, j) & h(N, j) \end{bmatrix}.$$

На основе модели (8) может быть синтезирован линейный оптимальный алгоритм (при построчных наблюдениях) фильтрации, минимизирующий среднеквадратичную ошибку оценки состояний  $x_j^*$ . Он может быть формально получен, по крайней мере при независимых от шага к шагу элементах  $A_j$ , на основе теоремы о нормальной корреляции и леммы о распространении ее результатов на случай присутствия в уравнениях состояния и наблюдения негауссовских случайных величин [7]. Его особенностью является возможность вероятностного описания положения границы и задания переходных матриц.

Таким образом в рамках рассмотренной статистической модели случайных полей, проводилось исследование характеристик синтезированных фильтров методом имитационного моделирования. На рис. 3 представлен иллюстрационный пример работы оптимального фильтра (4) для случая, когда граница поля изменяется по равновероятному закону, в виде изображений исходного зашумленного и восстановленного полей ( $\alpha_x = \alpha_y = 0,5$ ;  $\Delta x = \Delta y = 0,02$ ;  $N = M = 50$ ;  $N1 = 10$ ;  $N2 = 40$ ;  $\sigma_\lambda^2 = \sigma_z^2 = 1$ ;  $h(i,j) = 1$ ,  $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$ ). На рис. 4 приведен пример работы фильтра при наличии внутренних локально пораженных участков.

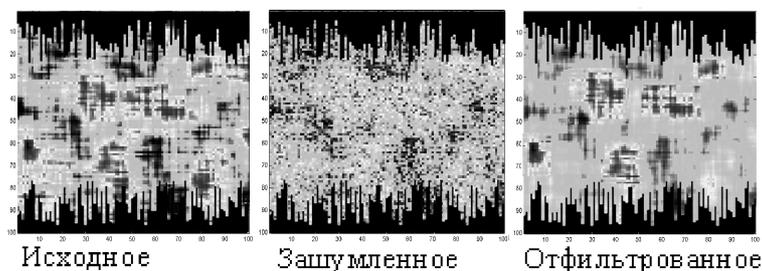


Рис. 3. Поле с произвольной границей.

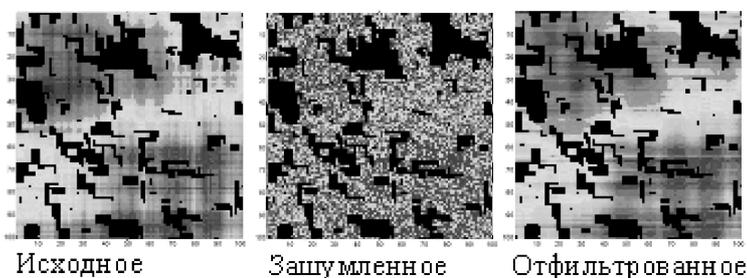


Рис. 4. Поле при наличии локально пораженных участков.

На рис. 5 представлены иллюстративные примеры работы линейного фильтра (7) для случая двух разделенных общей

границей полей, в виде изображений исходного, зашумленного и восстановленного полей, а также разреза этих полей при  $M=50$ , которые позволяют судить о достаточно высоком качестве восстановления исходного изображения ( $\alpha_{x1,y1} = 0.01$ ,  $\alpha_{x1,y1} = 1$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0.01$ ,  $M = N = 50$ ,  $N1 = 40$ ,  $N2 = 60$ ,  $\sigma_{\lambda 1,2} = 0.5$ ).

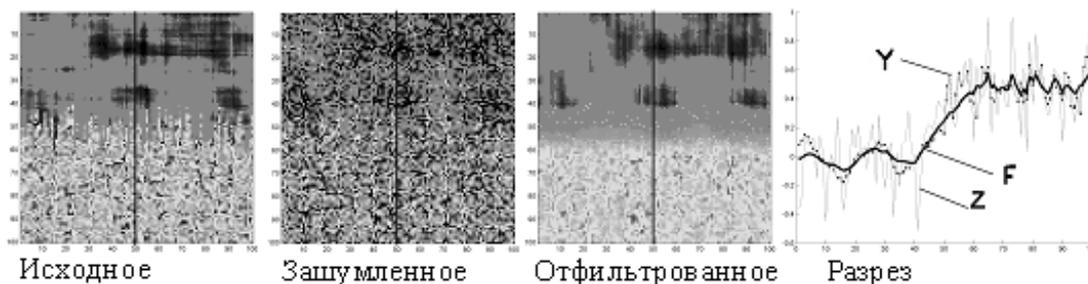


Рис. 5. Общая граница, изменяется по равновероятному закону.

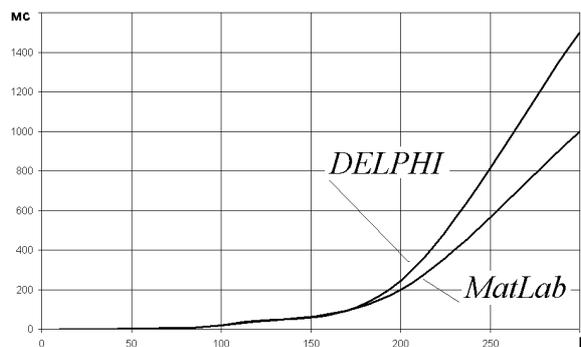


Рис. 6. Зависимость времени обработки от размера фильтруемого поля.

Анализ полученных в ходе машинных экспериментов результатов позволяет сделать вывод, что качество обработки при решении рассматриваемой задачи на основе предложенных алгоритмов существенно зависит не только от уровня шума наблюдения и величины перепада среднего уровня разделенных границ полей, но и от степени пространственной корреляции стохастических составляющих исходных полей  $\lambda_{1,2}$ .

Для практического применения синтезированных фильтров крайне важным является скорость работы, анализ затрат процессорного времени, данных алгоритмов, позволил сделать вывод, что самой требовательной к процессорному времени является процедура обращения матриц. Необходимо отметить, что первоначально рассматриваемые задачи решались в среде DELPHI. При переходе в среду MATLAB, помимо определенных выше преимуществ, отмечается повышение быстродействия обработки. В

качестве примера на рис. 6 представлена зависимость времени работы фильтра (4), от размерности фильтруемого поля, для случаев реализации представленного алгоритма на языке PASCAL в среде DELPHI и в среде MATLAB. Высокая степень оптимизации этой процедуры в среде MATLAB позволила работать написанной программе, гораздо быстрее (см. рис. 6) аналогичной, но реализованной на DELPHI. Данные алгоритмы были реализованы в среде MATLAB с использованием графической системы, позволяющей проводить визуализацию двух- и трехмерных данных, а так же обработку изображений. Это позволило получить наглядное представление результатов работы и построение экспериментальных зависимостей, не прибегая к написанию дополнительных процедур. Возможности среды MATLAB по обработке стандартных форматов графических данных позволили исследовать работу синтезированных фильтров на реальных аэрофотоснимках.

Таким образом, использование среды MATLAB дало возможность реализовать целый класс алгоритмов рекуррентной фильтрации, а также провести модельные эксперименты и анализ полученных результатов в рамках одной среды, не прибегая к дополнительным программным средствам, что значительно сократило время разработки.

### *Литература*

1. *Васильев К.К., Крашенинников В.А.* Методы фильтрации многомерных случайных полей. Саратов: Изд. СГУ, 1990. 223 с.
2. *Ярлыков М.С., Швецов В.И.* Оптимальное нелинейное оценивание гауссовских разделимых случайных полей в радиотехнических задачах // Радиотехника. 1997. № 1. С. 48-56.
3. *Котомин Н.П., Юфряков Б.А.* Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 1. С. 32-41.
4. *Попело В.Д., Сирота А.А.* Оценивание случайных полей изображений совместно с определением границ между ними при построчных наблюдениях // Радиотехника (журнал в журнале). 2000. № 10. С. 65-73.
5. *Трифонов А.П., Шинаков Ю.С.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.
6. *Шапиро Е.И.* Стабильное решение задачи нелинейной фильтрации в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. 1980. №5. С. 99-105.
7. *Малютин Ю.М., Экало А.В.* Применение ЭВМ для решения задач идентификации объектов. Л.: Изд. Ленинградского Ун-та, 1988.

УДК 537.533.7

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА PDE MATLAB ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРОНИКНОВЕНИИ И ОБРАТНОМ РАССЕЯНИИ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ, ПАДАЮЩИХ НА МИШЕНЬ**

Смоляр В.А., Еремин А.В., Харламов О.С., Давидян А.П.  
Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград  
e-mail: [vlas@bayard.ru](mailto:vlas@bayard.ru)

### ***1. Введение***

В настоящей работе мы хотим показать наш опыт применения пакета PDE MATLAB для расширения возможностей диффузионной модели кинетического уравнения для быстрых электронов, предложенной нами в работе [1]. В этой модели кинетическое уравнение г. Бете сводится к уравнению диффузии для плотности электронов, в котором роль времени выполняет средняя длина пройденного электроном пути. Падающий на поверхность мишени поток электронов заменяется на изотропный источник, расположенный на глубине полной диффузии, которая определяется как среднее смещение остановившихся электронов. Условие на границе требует, чтобы поток электронов шел из мишени в свободное пространство. Модель построена ab initio, без введения в теорию подгоночных эмпирических параметров, и позволяет получить разумные оценки для коэффициентов обратного рассеяния и распределения инжектированного заряда и выделенной энергии в мишени.

Получить аналитическое решение задачи удастся, лишь усреднив поток диффундирующих электронов через границу в свободное пространство. Применение пакета PDE MATLAB позволяет получить ответ на вопрос о влиянии этого усреднения на конечные характеристики переноса электронов. Кроме того, соединение аналитических и численных методов расширяет круг решаемых задач. При этом задачи, имеющие аналитические решения, входят в число задач, решаемых численно, и это обеспечивает их надежное взаимное тестирование. Использование пакета прикладных программ для решения дифференциальных

уравнений в частных производных сводит проблему численного решения к ее корректной постановке в терминах пакета. PDE MATLAB перекладывает рутинную математическую работу по численному решению на специалистов – математиков и программистов, создавших пакет, и дает возможность сосредоточиться на физической стороне проблемы.

## 2. Основные положения диффузионной модели кинетического уравнения

Кинетическое уравнение Бете, записанное для плотности электронов  $f(r, \vec{\Omega}, t)$  в пространстве координат  $r$  и направлений движения  $\vec{\Omega}$  в момент времени  $t$ , однозначно связанный с пройденным путём  $s$ , имеет вид [2]

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{v \partial t} = -\vec{\Omega} \cdot \nabla f + \int d\vec{\Omega}' N \sigma(v, \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) [f(r, \vec{\Omega}', t) - f(r, \vec{\Omega}, t)], \quad (1)$$

где  $v$  - скорость электронов,  $s$  - путь по траектории,  $N$  - число атомов в единице объема,  $\sigma$  - дифференциальное сечение рассеяния. В задаче о падающем на мишень пучке электронов следует добавить источник на поверхности мишени, испускающий электроны вдоль оси  $z$ , направленной по внутренней нормали к поверхности  $\vec{n}$

$$S(r, \vec{\Omega}, s) = S_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(\vec{n} - \vec{\Omega}) \delta(s), \quad (2)$$

где  $S_0$  - интенсивность источника – число электронов, испускаемых в единицу времени.

Проникая в мишень, пучок рассеивается и постепенно изотропизируется. Когда анизотропия электронов по направлениям движения становится малой, применяется диффузионное приближение, в котором при разложении  $f(r, \vec{\Omega}, t)$  по полиномам Лежандра можно ограничиться двумя первыми слагаемыми:

$$f(r, \vec{\Omega}, s) = \frac{1}{4\pi} (F(r, s) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{J}(r, s)), \quad (3)$$

где

$$F(r, s) = \int f(r, \vec{\Omega}, s) d\vec{\Omega}$$

- плотность электронов,

$$\vec{J}(r, s) = \int \vec{\Omega} f(r, \vec{\Omega}, s) d\vec{\Omega}$$

- вектор плотности потока электронов. В результате кинетическое уравнение (1) сводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{\lambda(s)}{3} \Delta F, \quad (4)$$

и уравнению для диффузионного потока

$$\bar{J} = -\frac{\lambda(s)}{3} \nabla F. \quad (5)$$

Здесь  $\lambda$  - транспортная длина, определяемая интегралом

$$\frac{1}{\lambda(s)} = 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta (1 - \cos(\theta)) N \sigma(\theta, v(s)), \quad (6)$$

где  $\theta$  - угол рассеяния.

На границе нет потока из свободного пространства внутрь мишени, кроме падающего потока (2), т.е.

$$f(r, \bar{\Omega}, s) = 0, \quad \bar{\Omega} \cdot \bar{n} > 0, \quad s > 0. \quad (7)$$

Условие (7) невозможно выполнить в диффузионном приближении, однако можно потребовать его выполнения в среднем по направлениям внутрь мишени. Усреднив по углам поток электронов внутрь мишени, получим граничное условие

$$F(x, y, 0, s) = \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, 0, s). \quad (8)$$

Таким образом, основные положения диффузионной модели формулируются следующим образом:

- (I) Кинетическое уравнение (1) заменяется уравнениями (4) и (5), и это означает, что в основе модели лежит диффузионное приближение.
- (II) Падающий поток (2) заменяется изотропным источником, который помещается на глубине полной диффузии  $z_d$  и испускает электроны с энергией  $E_0$ , но с уменьшенной на величину  $z_d$  начальным пробегом.
- (III) На границе со свободным пространством накладывається условие (8), требующее отсутствия диффузионного потока в мишень из свободного пространства.

### **3. Аналитическое решение задачи о падающем на полубесконечную мишень пучке электронов**

В приближении непрерывного замедления, в котором записано исходное кинетическое уравнение (1), путь электрона в мишени получается интегрированием обратной величины средних потерь энергии электрона на единице пути

$$s(E_0, E) = \int_E^{E_0} \frac{dE}{\langle \varepsilon(E) \rangle}. \quad (9)$$

По определению,

$$\langle \varepsilon(E) \rangle = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon w_{inel.}(E, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (10)$$

где  $w_{inel.}(E, \varepsilon)$  - число столкновений электрона на единице пути с

потерь энергии  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{\max}$  - максимальная потеря энергии.

В качестве глубины полной диффузии примем среднее смещение остановившихся электронов, испускаемых плоским источником, погруженным в бесконечную рассеивающую среду, по нормали к плоскости источника. Формула для среднего смещения таких электронов в зависимости от величины остаточного пробега получена Льюисом [3] и имеет вид

$$\langle z(r) \rangle = \frac{R_0}{d+1} (1 - r^{d+1}),$$

где  $R_0 = s(E_0, 0)$  - начальный пробег падающих на мишень электронов,  $r = R(E) / R_0$  - остаточный пробег,  $d = R_0 / \lambda$ . Воспользовавшись этим выражением, получим положение изотропного источника, заменившего падающий поток - глубину полной диффузии

$$z_d \equiv \langle z(r=0) \rangle = \frac{R_0}{d+1}. \quad (11)$$

В соответствии с положением (II) диффузионной модели, путь, пройденный диффундирующими электронами  $\zeta$ , связан с полным путем, пройденным электронами от точки входа в мишень, вычисленным по формуле (9), соотношением

$$\zeta = \frac{R_0 - z_d}{R_0} s(E_0, E).$$

Таким образом, математическая формулировка диффузионной модели задачи (1), (2) с падающим потоком электронов единичной интенсивности имеет вид уравнения диффузии с  $\delta$ -образным источником

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = -\frac{\lambda(\zeta)}{3} \Delta F + \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_d)\delta(\zeta), \quad (12)$$

и граничным условием

$$\frac{1}{2} F(x, y, 0, \zeta) = \frac{\lambda(\zeta)}{3} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, 0, \zeta). \quad (13)$$

Задача (12), (13) решалась численно стандартными методами с применением пакета PDE MATLAB и полученное решение сопоставлялось с аналитическим решением, полученным ниже.

Для аналитического решения задачи введем новую переменную - "возраст" электронов

$$\tau(\zeta) = \frac{1}{3} \int_0^\zeta \lambda(\zeta) d\zeta \quad (14)$$

и усредним коэффициент диффузии в граничном условии (13). После этого уравнение диффузии (12) и условие на границе (13) примут вид

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \Delta F + \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_d)\delta(\tau), \quad (15)$$

$$F(x, y, 0, \tau) = \frac{2}{3} \langle \lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, 0, \tau), \quad (16)$$

и будут иметь постоянные коэффициенты. Здесь  $\langle \lambda \rangle$  - усредненная по возрасту электронов транспортная длина

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \lambda(\tau) d\tau,$$

где  $\tau_0$  - возраст остановившихся электронов, вычисленный по формуле (14) с верхним пределом интеграла равным  $R_0 - z_d$ .

Решение задачи (15), (16) дает плотность электронов с возрастом  $\tau$  и имеет вид

$$F(x, y, z, \tau) = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left[ \exp\left(-\frac{(z-z_d)^2}{4\tau}\right) + \exp\left(-\frac{(z+z_d)^2}{4\tau}\right) \right] - a \exp(a^2\tau + a(z+z_d)) \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{\tau} + \frac{z+z_d}{2\sqrt{\tau}}\right) \right\} \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \right)^2 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\tau}\right), \quad (17)$$

где введено обозначение  $a = 2\langle \lambda \rangle / 3$ .

Плотность остановившихся электронов, вычисленная по формуле (17) и умноженная на заряд электрона, представляет собой распределение в мишени инжектированного заряда при единичной интенсивности падающего пучка электронов. При интенсивности пучка  $S_0$  электронов в секунду получим распределение плотности инжектированного за единицу времени заряда

$$\frac{dQ(x, y, z)}{dV} = S_0 e F(x, y, z, \tau_0), \quad (18)$$

где  $e$  - заряд электрона,  $dV$  - элемент объёма.

Коэффициент обратного рассеяния можно получить, вычтя из единицы проинтегрированную по объёму мишени плотность остановившихся электронов, вычисленную по (17) для остановившихся электронов. Полученная таким образом формула для коэффициента обратного рассеяния имеет вид

$$b = \operatorname{erfc}\left[\frac{z_d}{2\sqrt{\tau_0}}\right] - \exp(a^2\tau_0 + a z_d) \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{\tau_0} + \frac{z_d}{2\sqrt{\tau_0}}\right). \quad (19)$$

Распределение по энергии потока обратно рассеянных электронов получим из граничного условия (16)

$$\frac{db}{dE} = \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{z_d^2}{4\tau}\right) - a \exp(a^2\tau + a z_d) \operatorname{erfc}\left(a\sqrt{\tau} + \frac{z_d}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \frac{d\tau}{dE} \quad (20)$$

Заметим, что до сих пор мы не использовали какие – либо особенности рассеяния частиц пучка. По этой причине все

сказанное выше может относиться в равной степени к электронам, позитронам или легким ионам. Для доведения вычислений до числа необходимо задать сечения упругого и неупругого рассеяний в формулах для транспортной длины (6) и потерь энергии на единицу длины пути (10) для данного вещества и данной энергии проникающих в мишень частиц.

Вещество мишени и энергия электронов входят в диффузионную модель не через сечения упругого и неупругого рассеяния, как в исходном кинетическом уравнении (1), а через транспортную длину и средние потери энергии электрона на единицу пути. Для вычисления транспортной длины и средних потерь на единицу пути использовались стандартные формулы, взятые из работы Спенсера [4]:

$$\frac{1}{\lambda(T)} = 2\pi r_e^2 N(Z+1) \frac{(T+1)^2}{T^2(T+2)^2} [\ln(1+1/\eta) - 1/(1+\eta)],$$

$$\langle \varepsilon(T) \rangle = 4\pi r_e^2 NZ \frac{(T+1)^2}{T(T+2)} \ln[1.166T/I(Z)],$$

где  $T = E/mc^2$  - энергия, выраженная в единицах энергии покоя электрона,  $r_e$  - классический радиус электрона,  $N$  - число атомов в единице объёма,

$$\eta = 1.75 \cdot 10^{-5} Z^{2/3} / [T(T+2)]$$

- параметр экранирования ядра атомными электронами,

$$I(Z) = \begin{cases} 13.6 Z, & Z < 10; \\ (9.76 + 58.8 Z^{-1.19})Z, & Z \geq 10; \end{cases}$$

- средний ионизационный потенциал атомов мишени в электрон-вольтах. Формулы (22) и (23) справедливы для энергий от  $I(Z)$  до 1 МэВ, когда потери энергии определяются ионизацией и возбуждением атомов, а радиационными потерями можно пренебречь.

#### 4. Численное решение с применением пакета PDE MATLAB

Учитывая осевую симметрию, перейдем в цилиндрические координаты. Уравнение (12) примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{2\pi}{\rho} \delta(\rho) \delta(z - z_d) \delta(\tau). \quad (21)$$

Задача решается численно, поэтому необходимо ввести границу по координате  $\rho$ . Будем решать задачу в цилиндре  $z \in [0, z_b]$ ,  $\rho \in [0, \rho_b]$  для интервала времени  $0 \leq \tau \leq \tau_0$ . Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(0, z, \tau)}{\partial \rho} &= 0, \\ \frac{1}{2} F(\rho_b, z, \tau) &= -\frac{\lambda_{tr}}{3} \frac{\partial}{\partial \rho} F(\rho_b, z, \tau), \\ \frac{1}{2} F(\rho, 0, \tau) &= -\frac{\lambda_{tr}}{3} \frac{\partial}{\partial z} F(\rho, 0, \tau), \\ \frac{1}{2} F(\rho, z_b, \tau) &= -\frac{\lambda_{tr}}{3} \frac{\partial}{\partial z} F(\rho, z_b, \tau).\end{aligned}\quad (22)$$

Величины  $z_b$  и  $\rho_b$  выбираются так, чтобы плотность остановившихся электронов на границах была на 2 – 3 порядка меньше, чем в точке расположения источника ( $z_d, 0$ ).

В обозначениях PDE уравнение параболического типа решается в декартовых координатах  $x, y$  и времени  $t$ , и в обозначениях графического интерфейса пользователя GUI, вызываемого командой `>pdetool`, имеет вид

$$d * u' - \text{div}(c * \text{grad}(u)) + a * u = f. \quad (23)$$

Граничным условиям (24) соответствуют условия Неймана, которые в обозначениях графического интерфейса имеют вид

$$\bar{n} * c * \text{grad } u + q * u = g. \quad (24)$$

В этих координатах формально уравнение (21) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{y} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\pi}{y} \delta(y) \delta(x - x_d) \delta(t). \quad (25)$$

Перепишем это уравнение в виде

$$y \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\pi \delta(y) \delta(x - x_d) \delta(t). \quad (26)$$

Сопоставляя уравнения (25) и (23) получаем соответствия

$$x = z, \quad y = \rho, \quad t = \tau,$$

$$u = F, \quad d = y, \quad c = y, \quad a = 0, \quad f = 0$$

Сопоставляя граничные условия (22) и (24), получаем выражения для коэффициентов в граничном условии Неймана

$$q = -\frac{3}{2\lambda_{tr}}, \quad g = 0.$$

Вместо мгновенного единичного источника в уравнении (26) введем начальное условие в виде решения уравнения (26) для мгновенного точечного источника в бесконечной среде

$$u(\rho, z, t = t_{in}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau_{in}})^3} \exp\left(-\frac{(z - z_d)^2}{4\tau_{in}}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\tau_{in}}\right), \quad (27)$$

где  $\tau_{in}$  выбирается так, чтобы гауссиан (27) полностью находился внутри мишени, т. е. в границах прямоугольника  $x \in [0, z_b]$ ,  $y \in [0, \rho_b]$ .

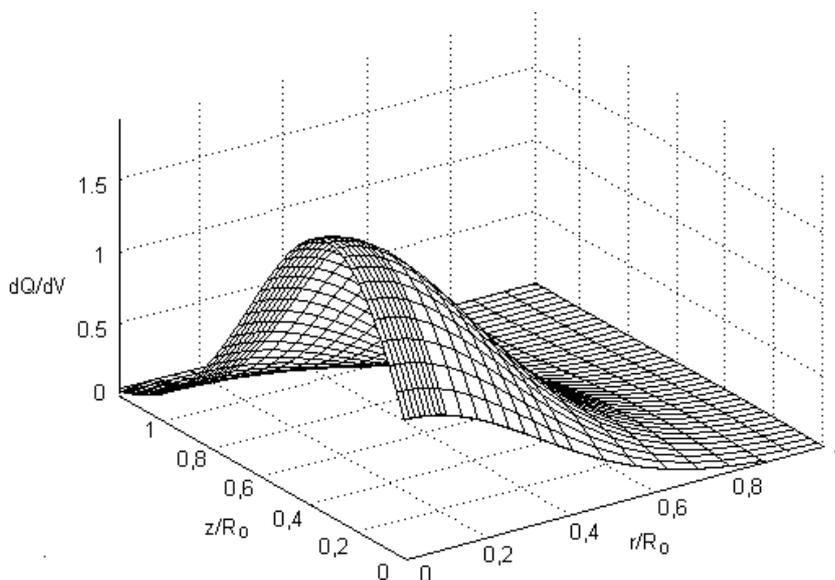


Рис. 1. Распределение инжектированного заряда в алюминиевой мишени при энергии пучка электронов 10 кэВ.

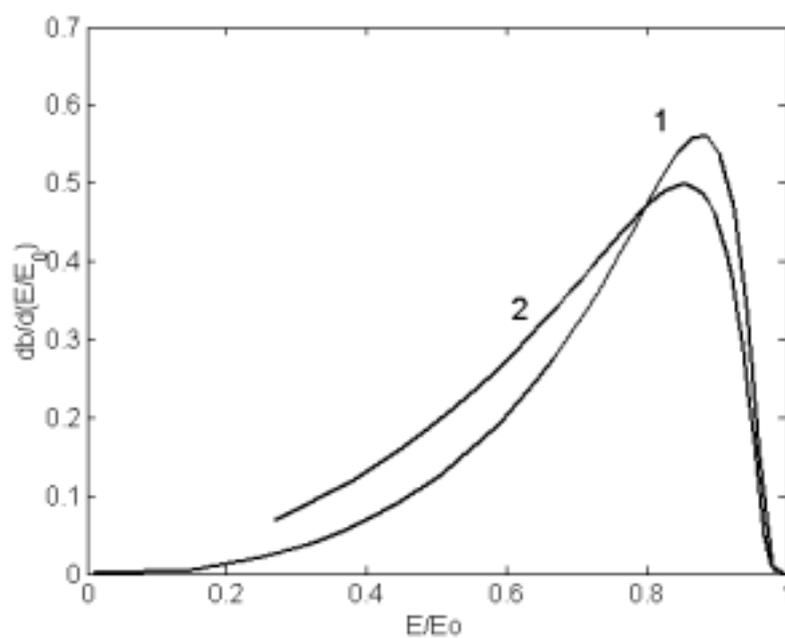


Рис. 2. Энергетический спектр обратно рассеянных электронов от алюминиевой мишени при начальной энергии электронов 10 кэВ, вычисленный: 1 – аналитически с усредненным коэффициентом в граничном условии; 2 – численно с применением пакета PDE.

Рис. 1 дает детальное трехмерное изображение распределения плотности инжектированного заряда, вычисленного с применением

пакета PDE. Падающий пучок электронов, направленный вдоль оси  $z$  и входящий в мишень в точке начала координат, заменяется на изотропный источник, расположенный на глубине полной диффузии  $z_d$  в точке с координатами  $(z = z_d, \rho = 0)$ . Для алюминиевой мишени и энергии электронов 10 кэВ  $z_d = 0.3004 R_0$ , где  $R_0 = 1.521$  мкм - начальный пробег электронов.

Коэффициент обратного рассеяния  $b$ , вычисленный аналитически по формуле (19), равен 0.177 и мало отличается от вычисленного численного, и равного 0.18. Однако распределения обратно рассеянных электронов по энергии, показанные на рис. 2, заметно отличаются друг от друга.

### **Выводы**

Таким образом, преимущество применения пакета PDE MATLAB состоит в оптимальном соединении аналитических и численных методов решения задач о проникновении и обратном рассеянии пучка быстрых электронов, падающих на мишень, на стадии исследования диффузионной модели кинетического уравнения и создания методических пособий с учебными целями.

### **Литература**

1. Смоляр В.А., Ерёмин А. В. Диффузионная модель кинетического уравнения для пучка быстрых электронов, падающего на полубесконечную мишень // Радиотехника и электроника. 2001. №5. С. 599-603.
2. Bethe H., Rose M. E., Smith L. P. The multiple scattering of electrons // Proc. Amer. Phil. Soc. 1938. V. 78. № 4. P. 573-585.
3. Lewis H. W. Multiple scattering in an infinite medium // Phys. Rev. V. 78. №. 5. P. 526-530.
4. Spencer L. V. Theory of electron penetration // Phys. Rev. 1955. V. 98. №. 6. P. 1597-1616.

УДК 629.12

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ ТРОСА

Сухоруков А.Л.

Центральное конструкторское бюро морской техники  
«Рубин», г. Санкт-Петербург  
e-mail: [kaverinskiy11@ckb-rubin.spb.su](mailto:kaverinskiy11@ckb-rubin.spb.su)

### *Введение*

Изучение поведения тросовых систем имеет большое значение для решения многих практических задач (в строительстве, авиационной технике, в проектировании и эксплуатации воздушных линий электропередач). Причем с развитием техники круг приложений результатов и методов динамики и статики тросовых систем неуклонно расширяется. Особо важным представляется изучение динамики тросовых систем в морской технике, в частности, в якорных системах удержания полупогружных плавучих буровых установок (ППБУ), строительство которых развивается в последние годы в связи с расширением добычи нефти и газа со дна моря. Такие задачи отличают достаточно большие характерные размеры, в связи с чем, при исследовании статики и динамики встает вопрос об учете такого фактора, как упругость тросовой связи (особенно для синтетических тросов). Даже при упругом удлинении 1-2% и длине связей порядка километра ошибка в определении проекции составит десятки метров, что может значительно превосходить допустимые смещения сооружения. Таким образом, модель неупругой весомой связи, рассматриваемая рядом авторов [1,4,5], в данном случае, по всей видимости, неприемлема.

В статье представлен вывод и решение уравнений статики упругой, весомой, погруженной в жидкость связи, с помощью которых, в зависимости от налагаемых граничных условий, можно определить как форму связи, так и усилия в ней. При расчете динамики рассматривались малые колебания связи около состояния статического равновесия. Как будет показано ниже на

сравнительном примере, упругость связи играет ключевую роль при расчете собственных частот и форм колебаний троса. Знание частотного спектра позволяет прогнозировать всевозможные резонансные колебания как при силовом, так и при кинематическом (в зависимости от условий эксплуатации) возбуждении. Кроме того, знание собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний необходимо для приближенных методов исследования автоколебаний гибких элементов конструкций, находящихся в потоке жидкости или газа. Учет упругости связи позволяет корректно определить частоту и форму основного (первого) тона колебаний троса. Таким образом, можно сказать, что представленная модель представляет собой уточнение широко известной модели весоного нерастяжимого троса.

### 1. Вывод основных уравнений

Введем в рассмотрение глобальную систему координат  $OXYZ$  (см. рис.1). Пусть  $\bar{R}_A = const$  и  $\bar{R}_B = const$  радиус-векторы точек закрепления троса.

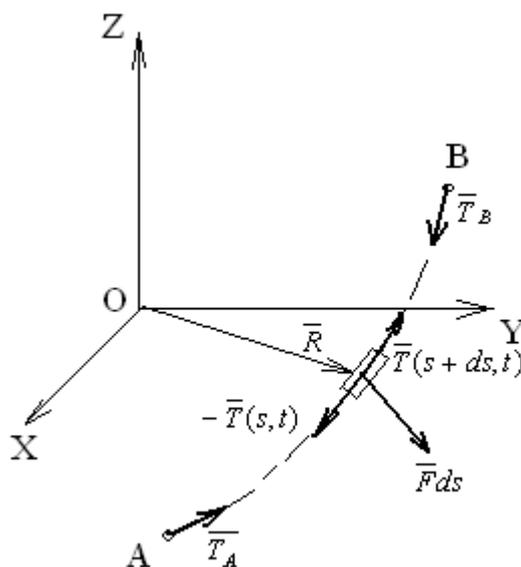


Рис. 1. Используемая система координат.

Введем натуральный параметр  $s$  – длину дуги, отсчитываемую вдоль ненапряженного троса от точки А,  $0 \leq s \leq L$ ,  $L$  – длина ненапряженного троса. Положение точки  $s$  троса,

находящейся между точками А и В, в момент  $t$  относительно осей ОХYZ определяется радиус-вектором  $\bar{R}(s, t)$ . Введем силу натяжения троса  $\bar{T}(s, t)$  в точке  $s$  в момент  $t$  как внутреннюю силу, действующую со стороны участка троса  $sB$  на участок  $As$ . Зададим распределение погонной плотности (массы на единицу длины) вдоль троса  $\rho(s)$ . Рассмотрим участок троса от  $s$  до  $s + ds$ , где  $ds$  – бесконечно малая длина участка. Масса этого участка равна  $\rho(s)ds$ . Действующие со стороны соседних участков троса силы натяжения равны  $\bar{T}(s + ds, t)$  и  $-\bar{T}(s, t)$ . Остальные силы (тяжести, архимедова сила, сила присоединенной массы), взятые в сумме и отнесенные к единице длины троса, обозначим  $\bar{F}$ . На участок  $ds$  будет действовать сила  $\bar{F}ds$ . Теперь запишем уравнение Ньютона для движения центра масс рассматриваемого участка троса:

$$\rho(s)ds \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2} = \bar{T}(s + ds, t) - \bar{T}(s, t) + \bar{F}ds, \quad (1)$$

откуда получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} + \bar{F}. \quad (2)$$

Это обычная форма уравнений динамики гибкой нити. По своему определению абсолютно гибкий трос не сопротивляется изгибу, и сила его натяжения всегда направлена вдоль касательной к линии троса:

$$\bar{T} = T\bar{\tau}, \quad \bar{\tau} = \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right) \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|^{-1}, \quad (3)$$

где  $\bar{\tau}$  – единичный вектор касательной к линии троса. Величина силы натяжения определяется законом растяжимости. Примем закон растяжимости Гука:

$$T = E(\gamma - 1), \quad \gamma = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|, \quad (4)$$

где  $E = E(s)$  – модуль упругости троса, вообще говоря, различный для различных точек;  $\gamma$  – относительное удлинение участка троса. Если удлинение и натяжение в некоторой точке  $s_*$  достигает критических значений  $\gamma_* = 1 + \delta_*$ ,  $T_* = E\delta_*$  (пластическая деформация не рассматривается), то происходит разрыв троса. Модуль упругости троса, состоящего из одинаковых параллельно уложенных волокон, определяется соотношением  $E = E_m f_B$ , аналогичное соотношение для погонной плотности  $\rho = \rho_m f_B$ , где  $E_m$  и  $\rho_m$  – модуль упругости и плотность материала волокон,

$f_B = k_f f$ ;  $f$  – площадь сечения троса;  $k_f$  – доля площади сечения, занимаемая волокнами. Кручение волокон в тросе приводит к снижению суммарного модуля упругости по сравнению с указанным значением:  $E = k_E E_m f_B$ ; коэффициент  $k_E$  тем меньше, чем больше углы свивки; при одинарной свивке  $k_E \approx \cos^4 \alpha$  ( $\alpha$  – средний угол свивки), для стальных тросов  $k_E \approx 0,6 - 0,9$  [6]. При подстановке (3), (4) в (2) получается векторное уравнение в частных производных волнового типа, решение которого позволяет исследовать динамику троса.

## 2. Решение задачи статики

При нахождении равновесной стационарной конфигурации упругого троса, закрепленного в точках А и В, предполагается, что компоненты вектора возмущающих сил  $\bar{F}$  в осях OXYZ не зависят от времени. Реальные возмущающие силы в строгом смысле не удовлетворяют этому условию, но в главных членах условие стационарности может быть выполнено. В стационарном случае  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$  и мы можем перейти в уравнении (2) от частных дифференциалов к полным:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\bar{F}. \quad (5)$$

Из (3) и (4) получим:

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \tau \left| \frac{d\bar{R}}{ds} \right| = \frac{\bar{T}}{T} \left| \frac{d\bar{R}}{ds} \right| = \frac{\bar{T}}{T} \gamma = \frac{\bar{T}}{T} \left( \frac{T}{E} + 1 \right) = \bar{T} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{E} \right). \quad (6)$$

В стационарном случае в вектор  $\bar{F}$  входит сила тяжести и архимедова сила, последняя может быть учтена за счет введения коэффициента веса троса в воде:

$$k = 1 - \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_m}. \quad (7)$$

Тогда вектор  $\bar{F} = \rho k \bar{g}$  и система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих равновесную конфигурацию упругого, погруженного в жидкость троса имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{T}}{ds} = -\rho k \bar{g} \\ \frac{d\bar{R}}{ds} = \bar{T} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{E} \right) \end{cases} \quad (8)$$

Возможны два варианта постановки граничных условий для системы (8):

1 вариант: задано натяжение и координаты на одном из концов троса:

$$\begin{cases} \overline{T}(s_A) = \overline{T}_A \\ \overline{R}(s_A) = \overline{R}_A \end{cases}$$

2 вариант: заданы координаты концов троса:

$$\begin{cases} \overline{R}(s_A) = \overline{R}_A \\ \overline{R}(s_B) = \overline{R}_B \end{cases}$$

Отметим, что во втором случае задача принадлежит к числу так называемых двухточечных краевых задач, когда часть граничных условий задана в начале промежутка интегрирования, а часть – в его конце. Этим объясняются некоторые сложности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8) при постановке граничных условий по второму варианту. Первое уравнение системы (8) без труда может быть проинтегрировано:

$$\overline{T} = -\rho k \overline{g} s + \overline{C}_1, \quad (9)$$

или в проекциях на оси системы OXYZ:

$$\begin{cases} \overline{T}_x = \overline{C}_{1x} \\ \overline{T}_y = \overline{C}_{1y} \\ \overline{T}_z = \rho k \overline{g} s + \overline{C}_{1z} \end{cases}, \quad (10)$$

откуда непосредственно следует, что горизонтальная составляющая натяжения (распор) постоянна в каждой точке троса. При постановке граничных условий по первому варианту вектор постоянных интегрирования  $\overline{C}_1$  сразу же может быть определен. С учетом (9) второе уравнение системы (8) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\overline{R}}{ds} = (-\rho k \overline{g} s + \overline{C}_1) \left[ \frac{1}{|-\rho k \overline{g} s + \overline{C}_1|} + \frac{1}{E} \right]. \quad (11)$$

Его решение равно:

$$\overline{R}(s) = \int \frac{-\rho k \overline{g} s + \overline{C}_1}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + (C_{1z} + \rho k \overline{g} s)^2}} ds + \int \frac{-\rho k \overline{g} s + \overline{C}_1}{E} ds + \overline{C}_2. \quad (12)$$

Найдем значения интегралов, входящих в выражение (12) в случае, если трос имеет ненулевой распор:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{ds}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + (C_{1z} + \rho kgs)^2}} = \\
& = \int \frac{ds}{\sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)}} = \\
& = \frac{1}{\rho k g} \operatorname{Arsh} \frac{2\rho^2 k^2 g^2 s + 2C_{1z} \rho k g}{\sqrt{4\rho^2 k^2 g^2 (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2) - 4C_{1z}^2 \rho^2 k^2 g^2}} = \\
& = \frac{1}{\rho k g} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}}; \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{sds}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + (C_{1z} + \rho kgs)^2}} = \int \frac{sds}{\sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)}} = \\
& = \frac{\sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)}}{\rho^2 k^2 g^2} - \\
& - \frac{2C_{1z} \rho k g}{2\rho^2 k^2 g^2} \int \frac{ds}{\sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)}} = \\
& = \frac{\sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)}}{\rho^2 k^2 g^2} - \\
& - \frac{C_{1z}}{\rho k g} \frac{1}{\rho k g} \operatorname{Arsh} \frac{2\rho^2 k^2 g^2 s + 2C_{1z} \rho k g}{\sqrt{4\rho^2 k^2 g^2 (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2) - 4C_{1z}^2 \rho^2 k^2 g^2}} = \\
& = \frac{1}{\rho^2 k^2 g^2} \left[ \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)} - C_{1z} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} \right] \tag{14}
\end{aligned}$$

В проекциях на оси глобальной системы координат OXYZ векторные уравнения (12), описывающие стационарную конфигурацию упругого весомого троса с учетом (13) и (14), будут:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} + \frac{C_{1x}s}{E} + C_{2x} \\ R_y = \frac{C_{1y}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} + \frac{C_{1y}s}{E} + C_{2y} \\ R_z = \rho kg \frac{1}{\rho^2 k^2 g^2} \left[ \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)} - C_{1z} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} \right] + \\ + \frac{C_{1z}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} + \frac{\rho kgs^2}{2E} + \frac{C_{1z}s}{E} + C_{2z} \end{array} \right. \quad (15)$$

Выполняя сокращение в последнем из соотношений (15), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} + \frac{C_{1x}s}{E} + C_{2x} \\ R_y = \frac{C_{1y}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{\sqrt{C_{1x}^2 + C_{1y}^2}} + \frac{C_{1y}s}{E} + C_{2y} \\ R_z = \frac{1}{\rho kg} \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1y}^2 + C_{1z}^2)} + \frac{\rho kgs^2}{2E} + \frac{C_{1z}s}{E} + C_{2z} \end{array} \right. \quad (16)$$

При постановке граничных условий по первому варианту вектор постоянных интегрирования  $\overline{C_2}$  может быть сразу же определен подстановкой условия  $\overline{R}(s_A) = \overline{R}_A$  в соотношение (16).

Рассмотрим определение векторов постоянных интегрирования  $\overline{C_1}$  и  $\overline{C_2}$  при постановке граничных условий по второму варианту:

$$\begin{cases} \overline{R}(s_A) = \overline{R}_A \\ \overline{R}(s_B) = \overline{R}_B \end{cases}, \quad s_A \leq s \leq s_B.$$

Не уменьшая общности, предположим, что трос провисает в плоскости XOZ, тогда из (16) следует:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs + C_{1z}}{|C_{1x}|} + \frac{C_{1x}s}{E} + C_{2x} \\ R_z = \frac{1}{\rho kg} \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s^2 + 2C_{1z} \rho kgs + (C_{1x}^2 + C_{1z}^2)} + \frac{\rho kgs^2}{2E} + \frac{C_{1z}s}{E} + C_{2z} \end{array} \right. \quad (17)$$

Подставляя граничные условия в точке В в (17), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{2x} = R_{xB} - \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs_B + C_{1z}}{|C_{1x}|} - \frac{C_{1x}s_B}{E} \\ C_{2z} = R_{zB} - \frac{1}{\rho kg} \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s_B^2 + 2C_{1z} \rho kgs_B + (C_{1x}^2 + C_{1z}^2)} - \frac{\rho kgs_B^2}{2E} - \frac{C_{1z}s_B}{E} \end{array} \right. .(18)$$

Подставляя (18) в (17) и записывая эти соотношения в точке А, получим систему из 2-х уравнений для определения  $C_{1x}$ ,  $C_{1z}$ , которые будут представлять собой проекции натяжения троса в точке А:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{xA} = \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs_A + C_{1z}}{|C_{1x}|} + \frac{C_{1x}s_A}{E} + R_{xB} - \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs_B + C_{1z}}{|C_{1x}|} - \frac{C_{1x}s_B}{E} \\ R_{zA} = \frac{1}{\rho kg} \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s_A^2 + 2C_{1z} \rho kgs_A + (C_{1x}^2 + C_{1z}^2)} + \frac{\rho kgs_A^2}{2E} + \frac{C_{1z}s_A}{E} + R_{zB} - \\ - \frac{1}{\rho kg} \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s_B^2 + 2C_{1z} \rho kgs_B + (C_{1x}^2 + C_{1z}^2)} - \frac{\rho kgs_B^2}{2E} - \frac{C_{1z}s_B}{E} \end{array} \right. .(19)$$

Так как  $s_A = 0$ , а длина троса в ненапряженном состоянии равна  $s_B$  получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{xA} = \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{C_{1z}}{|C_{1x}|} + R_{xB} - \frac{C_{1x}}{\rho kg} \operatorname{Arsh} \frac{\rho kgs_B + C_{1z}}{|C_{1x}|} - \frac{C_{1x}s_B}{E} \\ R_{zA} = \frac{1}{\rho kg} \sqrt{C_{1x}^2 + C_{1z}^2} + R_{zB} - \frac{1}{\rho kg} \sqrt{\rho^2 k^2 g^2 s_B^2 + 2C_{1z} \rho kgs_B + (C_{1x}^2 + C_{1z}^2)} - \\ - \frac{\rho kgs_B^2}{2E} - \frac{C_{1z}s_B}{E} \end{array} \right. .(20)$$

Система из двух трансцендентных уравнений (20) относительно  $C_{1x}$  и  $C_{1z}$  может быть записана в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(C_{1x}, C_{1z}) = 0 \\ f_2(C_{1x}, C_{1z}) = 0 \end{array} \right. .(21)$$

Задача решения системы (21) эквивалентна задаче минимизации функции 2-х переменных:

$$\min F(C_{1x}, C_{1z}) = \sum_{i=1}^2 |f_i(C_{1x}, C_{1z})|^2, \quad (22)$$

которая может быть решена любым численным методом минимизации функций нескольких переменных, например методом наискорейшего спуска. В программной системе MATLAB эта задача эффективно решается с помощью функции **fmins**. Определив  $C_{1x}$  и  $C_{1z}$ , подставляя граничные условия в точке А или В в (17), получим значения  $C_{2x}$  и  $C_{2z}$ . Таким образом, задача определения стационарной конфигурации упругого весомого троса с помощью

соотношений (17) и натяжения в нем по соотношению (10) будет полностью решена.

Отметим, что возможно также прямое численное интегрирование уравнений (8), однако при постановке граничных условий по второму варианту необходимо реализовать достаточно нерациональный в вычислительном отношении алгоритм пристрелки верхнего граничного условия.

С помощью методики, описанной выше, были построены упругие линии для стального троса длиной  $l = s_B = 300\text{м}$  при различных координатах верхней точки крепления (см. рис. 2).

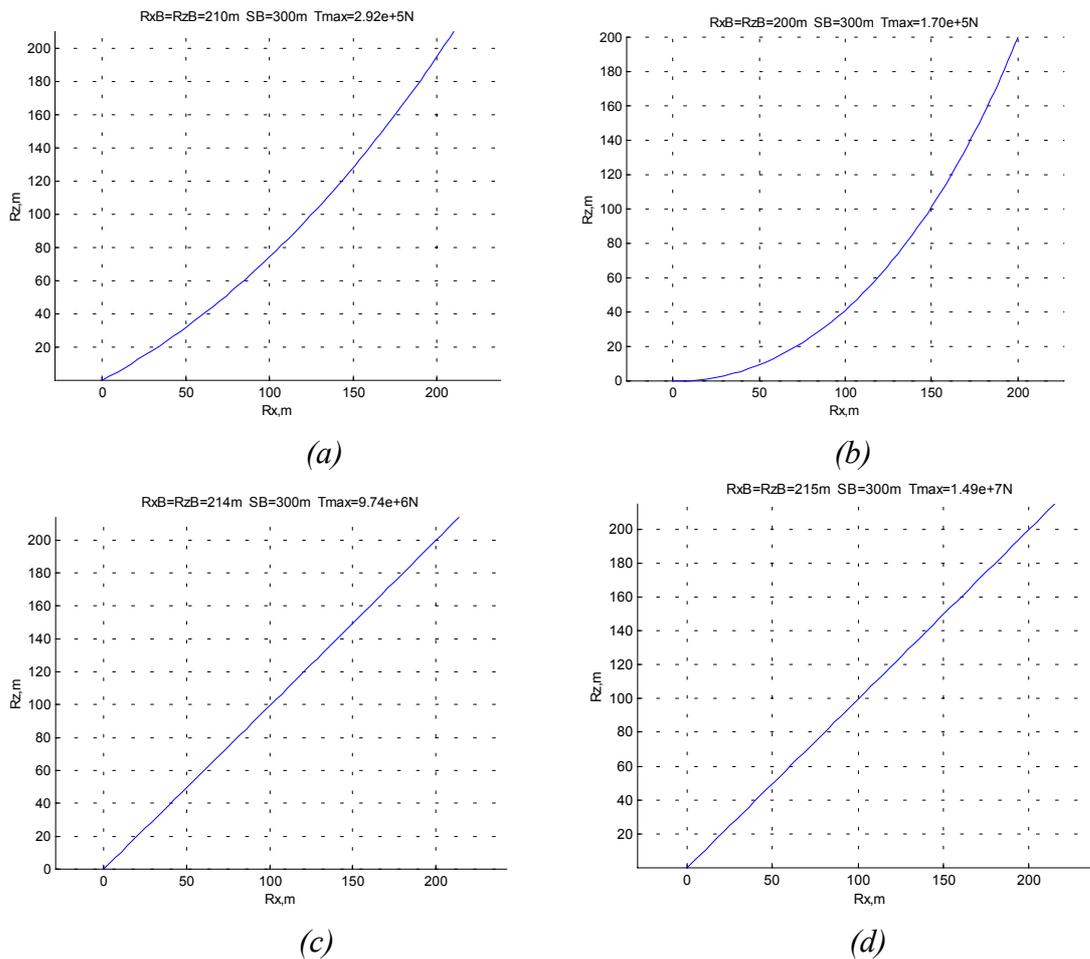


Рис. 2. Упругие конфигурации троса при различных координатах верхней точки крепления.

Предполагалось, что диаметр троса  $d = 10\text{см}$ , т.е.  
 $f = \pi(0,05) = 0,00785\text{м}^2$ ;  $\rho_m = 7900\text{кг} / \text{см}^3$ ;  $E_m = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ;  
 $k_E k_f = 0,7$ ; таким образом, модуль Юнга троса равен:

$E = k_E k_f E_m f = 1,099 \cdot 10^9 \text{ Н}$ . Задавались следующие значения координат верхней точки крепления троса: а)  $R_{xB} = R_{zB} = 200 \text{ м}$ ; б)  $R_{xB} = R_{zB} = 210 \text{ м}$ ; в)  $R_{xB} = R_{zB} = 214 \text{ м}$ ; д)  $R_{xB} = R_{zB} = 215 \text{ м}$ . Очевидно, что максимальное усилие возникает в верхней точке крепления троса. При этом до значений  $R_{xB} = R_{zB} = 210 \text{ м}$  деформация троса обуславливается как изменением формы упругой линии троса, так и его упругой деформацией. Максимальное усилие в этом случае оказывается на два порядка ниже максимального разрывного усилия  $T_{\max \text{ разр}} = \sigma_* k_f f \approx 2,6 \cdot 10^7 \text{ Н}$ . При дальнейшем увеличении координат верхней точки крепления при  $R_{xB} = R_{zB} = 214; 215 \text{ м}$  трос вытягивается в струну и его деформация обуславливается только лишь упругими свойствами материала троса, при этом происходит резкий рост напряжений в тросе и при  $R_{xB} = R_{zB} = 215 \text{ м}$  максимальное усилие в тросе по порядку величины достигает максимального разрывного усилия троса. При этом трос растягивается на 4 метра относительно ненапряженного состояния.

Таким образом, представленная модель, в отличие от модели нерастяжимого троса, позволяет строить жесткостные характеристики тросовых связей в области их упругих деформаций. Что особенно важно для определения коэффициентов жесткости связей (производная распора по горизонтальной проекции связи), широко используемых для определения собственных частот колебаний сооружений в горизонтальной плоскости, так как без учета упругости при увеличении распора данный коэффициент бесконечно возрастает.

### 3. Определение частот и форм собственных колебаний упругого весомого троса

При определении частот и форм собственных колебаний упругого весомого троса рассматриваются малые колебания троса около стационарного состояния равновесия. В число действующих на элемент троса  $ds$  сил при колебательном движении входит сила инерции присоединенной массы жидкости и уравнения движения (2) может быть записано в следующей развернутой форме:

$$(\rho + \rho_n) \frac{\partial^2 \bar{R}}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} + \rho k \bar{g}, \quad (23)$$

где  $\rho_n$  – погонная присоединенная масса равная:  $\rho_n = \rho_{\text{воды}} \frac{\pi d^2}{4}$  (предполагается, что основной вклад в значение присоединенной

массы вносят движения троса, перпендикулярные касательной к его осевой линии). С учетом (3) запишем уравнение (23) в проекциях на оси глобальной системы координат OXYZ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial R_x}{\partial s} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|^{-1} \right) \\ \frac{\partial^2 R_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial R_y}{\partial s} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|^{-1} \right) \end{array} \right. ; \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 R_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial R_z}{\partial s} \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|^{-1} \right) - \frac{\rho}{\rho + \rho_n} kg$$

С учетом (4) можем записать:

$$\left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|^{-1} = \frac{E}{E + T} = \frac{1}{1 + \frac{T}{E}}; \quad (25)$$

Так как для большинства материалов максимальное разрывное усилие в тросе  $T_*$ , как правило, на два порядка меньше его модуля Юнга, то  $\frac{T}{E} \ll 1$  и мы можем разложить (25) в степенной ряд:

$$\left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial s} \right|^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{T}{E}} = 1 - \frac{T}{E} + \left( \frac{T}{E} \right)^2 - \dots, \quad (26)$$

с радиусом сходимости  $\left( \frac{T}{E} \right)^2 < 1$ . Ограничиваясь линейными членами разложения (26) и подставляя их в (24), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 R_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial R_x}{\partial s} - \frac{T^2}{E} \frac{\partial R_x}{\partial s} \right) \\ \frac{\partial^2 R_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial R_y}{\partial s} - \frac{T^2}{E} \frac{\partial R_y}{\partial s} \right) \end{array} \right. . \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 R_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial R_z}{\partial s} - \frac{T^2}{E} \frac{\partial R_z}{\partial s} \right) - \frac{\rho}{\rho + \rho_n} kg$$

При малых колебаниях компоненты радиус-вектора произвольного участка троса  $ds$  и модуль силы натяжения могут быть представлены в виде суммы стационарной составляющей, характеризующей статическую конфигурацию троса и малой нестационарной составляющей, характеризующей именно

колебательное движение:

$$R_i(s, t) = R_{i0}(s) + u_i(s, t); \quad i = x, y, z; \quad (28)$$

$$T(s, t) = T_0(s) + \Delta T(s, t). \quad (29)$$

Подставляя (28), (29) в систему (27), сокращая слагаемые, характеризующие статику, и слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с  $u_i$  и  $\Delta T$ , получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( T_0 - \frac{T_0^2}{E} \right) \frac{\partial u_x}{\partial s} + \Delta T \left( \frac{\partial R_{x0}}{\partial s} - \frac{2T_0}{E} \frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( T_0 - \frac{T_0^2}{E} \right) \frac{\partial u_y}{\partial s} + \Delta T \left( \frac{\partial R_{y0}}{\partial s} - \frac{2T_0}{E} \frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( T_0 - \frac{T_0^2}{E} \right) \frac{\partial u_z}{\partial s} + \Delta T \left( \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} - \frac{2T_0}{E} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \right) \right] \end{cases} \quad (28)$$

где  $T_0$  – осевое усилие в тросе, полученное при решении задачи статики. С учетом (28) можем записать, что проекция приращения осевого усилия в тросе  $\overline{\Delta T}$  на оси глобальной системы координат OXYZ равна:

$$\Delta T_i = \left( T_0 - \frac{T_0^2}{E} \right) \frac{\partial u_i}{\partial s} + \Delta T \left( \frac{\partial R_{i0}}{\partial s} - \frac{2T_0}{E} \frac{\partial R_{i0}}{\partial s} \right), \quad i = x, y, z. \quad (29)$$

С другой стороны, в соответствии с правилами скалярного произведения:

$$\Delta T = \sum_i \Delta T_i \frac{\partial R_{i0}}{\partial s} \left| \frac{\partial \overline{R_0}}{\partial s} \right|^{-1} = \sum_i \Delta T_i \frac{\partial R_{i0}}{\partial s} \frac{E}{E + T_0}. \quad (30)$$

Исключив  $\Delta T$  из соотношений (29), получим систему трех дифференциальных уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial s} - \frac{\left(1 - \left(\frac{\partial R_{x0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E-2T_0}{E+T_0}\right)}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_x + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_y + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_z = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial s} + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_x - \frac{\left(1 - \left(\frac{\partial R_{y0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E-2T_0}{E+T_0}\right)}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_y + \frac{\frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_z = 0; (31) \\ \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_x + \frac{\frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_y - \frac{\left(1 - \left(\frac{\partial R_{z0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E-2T_0}{E+T_0}\right)}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_z = 0 \end{array} \right.$$

В результате, переходя к векторной форме записи, получим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + C_0 \Delta \bar{T} = 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial s} = 0 \end{array} \right. , \quad (32)$$

где

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{x0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \\ \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{y0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{\frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \\ \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{\frac{\partial R_{y0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{z0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E-2T_0}{E+T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Определив из системы (32)-(33)  $\bar{u}$  и  $\Delta \bar{T}$  находим динамическое осевое усилие троса  $\Delta T$  из соотношения (30). Не уменьшая общности задачи, предположим, что трос провисает в

плоскости XOZ. В этом случае система уравнений (32) распадается на систему четырех уравнений колебаний троса в вертикальной плоскости и двух уравнений колебаний троса относительно вертикальной плоскости.

Уравнения колебаний троса в вертикальной плоскости имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial s} - \frac{\left(1 - \left(\frac{\partial R_{x0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E - 2T_0}{E + T_0}\right)}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_x + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_z = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial s} + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_x - \frac{\left(1 - \left(\frac{\partial R_{z0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E - 2T_0}{E + T_0}\right)}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_z = 0 \cdot (34) \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial \Delta T_x}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial \Delta T_z}{\partial s} = 0 \end{array} \right.$$

Уравнения колебаний троса относительно вертикальной плоскости  $\left(\frac{\partial R_{y0}}{\partial s} = 0\right)$  следующие:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_y}{\partial s} - \frac{1}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_y = 0 \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho + \rho_n} \frac{\partial \Delta T_y}{\partial s} = 0 \end{array} \right. \cdot (35)$$

Входящие в уравнения (34), (35) функции, характеризующие статику троса, определяются согласно п.п.2:

$$\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} = C_{1x} \left[ \frac{1}{\sqrt{C_{1x}^2 + (C_{1z} + \rho kgs)^2}} + \frac{1}{E} \right]; (36)$$

$$\frac{\partial R_{z0}}{\partial s} = (\rho kgs + C_{1z}) \left[ \frac{1}{\sqrt{C_{1x}^2 + (C_{1z} + \rho kgs)^2}} + \frac{1}{E} \right]; (37)$$

$$T_0 = \sqrt{C_{1x}^2 + (C_{1z} + \rho kgs)^2}. (38)$$

Будем искать решение системы уравнений (34) в виде:

$$u_i = u_{i0} e^{i\beta t}; \quad \Delta T_i = \Delta T_{i0} e^{i\beta t}. \quad (39)$$

После преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_{x0}}{ds} - \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{x0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_{x0} + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_{z0} = 0 \\ \frac{du_{z0}}{ds} + \frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_{x0} - \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{z0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \Delta T_{z0} = 0 \\ \frac{d\Delta T_{x0}}{ds} + (\rho + \rho_n) \beta^2 u_{x0} = 0 \\ \frac{d\Delta T_{z0}}{ds} + (\rho + \rho_n) \beta^2 u_{z0} = 0 \end{array} \right. \quad (40)$$

С граничными условиями на концах троса:

$$\begin{cases} u_{x0}(0) = u_{x0}(s_B) = 0 \\ u_{z0}(0) = u_{z0}(s_B) = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Используя матричную форму записи, представим систему уравнений (40) в виде:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = A(\beta, s) \bar{v}; \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} u_{x0} \\ u_{z0} \\ \Delta T_{x0} \\ \Delta T_{z0} \end{pmatrix}; \quad (42)$$

$$A(\beta, s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{x0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & -\frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \\ 0 & 0 & -\frac{\frac{\partial R_{x0}}{\partial s} \frac{\partial R_{z0}}{\partial s} \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} & \frac{1 - \left(\frac{\partial R_{z0}}{\partial s}\right)^2 \frac{E - 2T_0}{E + T_0}}{T_0 - \frac{T_0^2}{E}} \\ -(\rho + \rho_n) \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\rho + \rho_n) \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} v_1(0) = v_1(s_B) = 0 \\ v_2(0) = v_2(s_B) = 0 \end{cases}, \quad (44)$$

здесь индекс означает номер компоненты вектора  $\bar{v}$ .

Система дифференциальных уравнений (42) имеет четыре линейно-независимых частных решения  $\bar{v}_i$  ( $i=1,2,3,4$ ). Эти решения можно найти, интегрируя уравнения (42) при следующих начальных условиях:

$$\bar{v}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{v}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{v}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{v}_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Интегрирование системы уравнений (42) при фиксированном значении  $\beta$ , начальных условиях (45) и соотношениях (44) можно провести любым стандартным методом численного интегрирования, например, методом Рунге-Кутты.

Общее решение системы (42) может быть представлено в виде суммы четырех линейно-независимых частных решений:

$$\bar{v} = C_1 \bar{v}_1 + C_2 \bar{v}_2 + C_3 \bar{v}_3 + C_4 \bar{v}_4. \quad (46)$$

С учетом граничных условий  $v_1(0) = 0$  и  $v_2(0) = 0$  постоянные интегрирования  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  и общее решение системы (42) будет иметь вид:

$$\bar{v} = C_3 \bar{v}_3 + C_4 \bar{v}_4. \quad (47)$$

Граничные условия при  $s = s_B$  эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{cases} C_3 v_{13}(s_B) + C_4 v_{14}(s_B) = 0 \\ C_3 v_{23}(s_B) + C_4 v_{24}(s_B) = 0 \end{cases}, \quad (48)$$

здесь  $v_{ki}$  означает  $k$ -ую компоненту вектора  $\bar{v}$  в  $i$ -ом частном решении.

Нетривиальное решение будет в случае, если:

$$D(\beta) = \begin{vmatrix} v_{13}(s_B, \beta) & v_{14}(s_B, \beta) \\ v_{23}(s_B, \beta) & v_{24}(s_B, \beta) \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку величины  $v_{ki}(s, \beta)$  зависят от значения  $\beta$ , то и величина определителя  $D(\beta)$  является функцией  $\beta$ . Задавая различные  $\beta$  и повторяя при этом весь процесс решения, вычислим значения функции  $D(\beta)$ , после чего можно определить корни этой функции, которые будут частотами собственных колебаний. Решатели обыкновенных дифференциальных уравнений системы

MATLAB могут быть эффективно использованы в этом процессе. Для каждой собственной частоты  $\beta_n$  из уравнений (48) находим:

$$C_4 = -\frac{v_{23}(s_B, \beta_n)}{v_{24}(s_B, \beta_n)} C_3. \quad (49)$$

После этого общее решение задачи о колебаниях упругого троса будет:

$$\bar{v}_n = C_3 \left[ \bar{v}_3(s, \beta_n) - \frac{v_{23}(s_B, \beta_n)}{v_{24}(s_B, \beta_n)} \bar{v}_4(s, \beta_n) \right], \quad (50)$$

из которого можно определить как формы собственных колебаний, так и усилия, возникающие в тросе при колебаниях по  $n$ -ой форме.

В заключение этого пункта отметим, что система уравнений (32) допускает естественный переход к модели нерастяжимого троса при модуле Юнга  $E \rightarrow \infty$ . Задача об определении форм и частот колебаний нерастяжимого троса была рассмотрена в [1,4,5].

#### **4. Сравнительный анализ моделей упругого и нерастяжимого троса в области определения частот и форм колебаний**

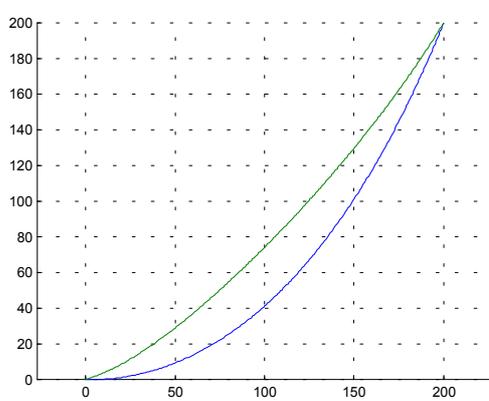
По методике, описанной в п.п. 3, были рассчитаны формы и частоты колебаний упругого троса при различных координатах верхней точки крепления. Рассматривался трос с указанными выше параметрами. На рис. 3 и рис. 4 представлены первые три формы собственных колебаний упругого троса длиной  $s_B = 300\text{м}$  с координатами верхней точки крепления  $R_{xB} = R_{zB} = 200\text{м}$  и  $R_{xB} = R_{zB} = 210\text{м}$ .

Этим формам соответствуют следующие циклические собственные частоты:

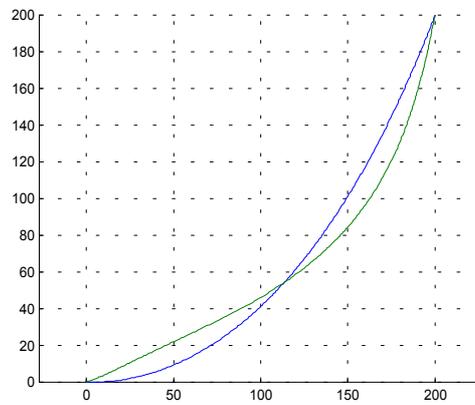
- в первом случае:  $\beta_1 = 0,4206; \beta_2 = 0,8365; \beta_3 = 1,2525$ ;
- во втором случае:  $\beta_1 = 0,6308; \beta_2 = 1,2679; \beta_3 = 1,9032$ .

Как и следовало ожидать, с увеличением координат верхней точки крепления, т.е. при растяжении троса происходит увеличение частот собственных колебаний. Отметим, что при колебаниях по первой форме не наблюдается узлов, лежащих на упругой линии троса.

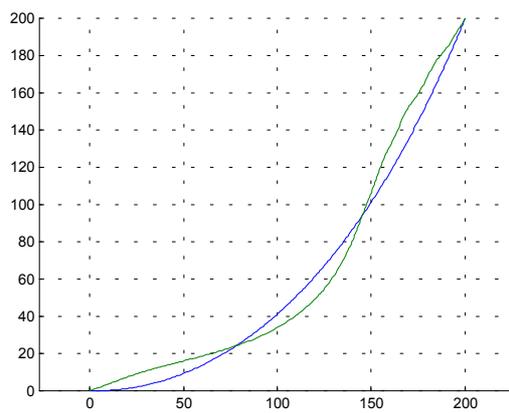
На рис. 5 и рис. 6 представлены первые две формы собственных колебаний с теми же координатами верхней точки крепления, но рассчитанные в рамках модели нерастяжимого троса, рассмотренной в [5], т.е. при решении задачи статики троса в рамках модели цепной линии и осуществлении предельного перехода  $E \rightarrow \infty$ .



(a)

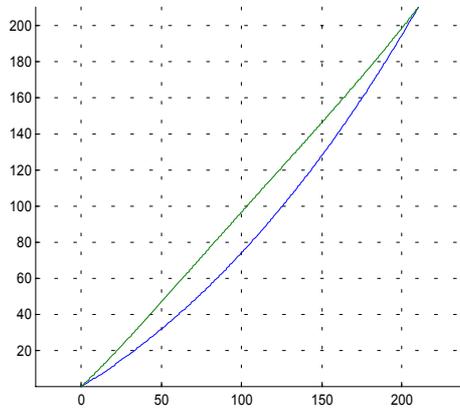


(b)

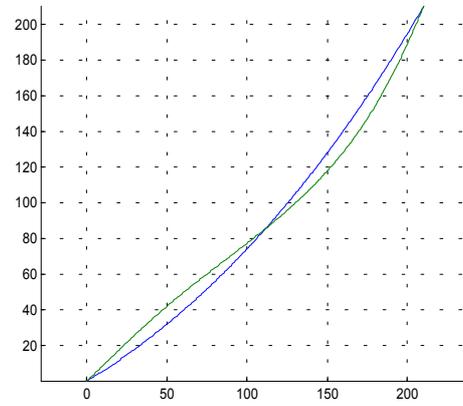


(c)

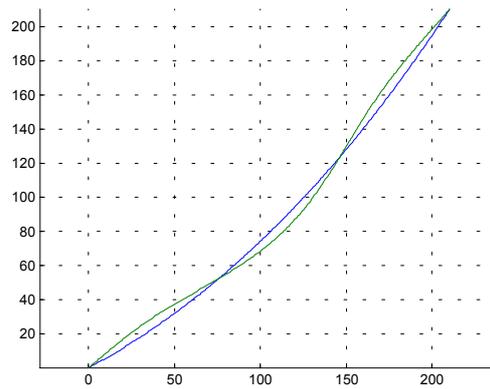
Рис. 3. Формы собственных колебаний упругого троса при  $R_{xB} = R_{zB} = 200\text{м}$ .



(a)



(b)



(c)

Рис. 4. Формы собственных колебаний упругого троса при  $R_{xB} = R_{zB} = 210\text{ м}$ .

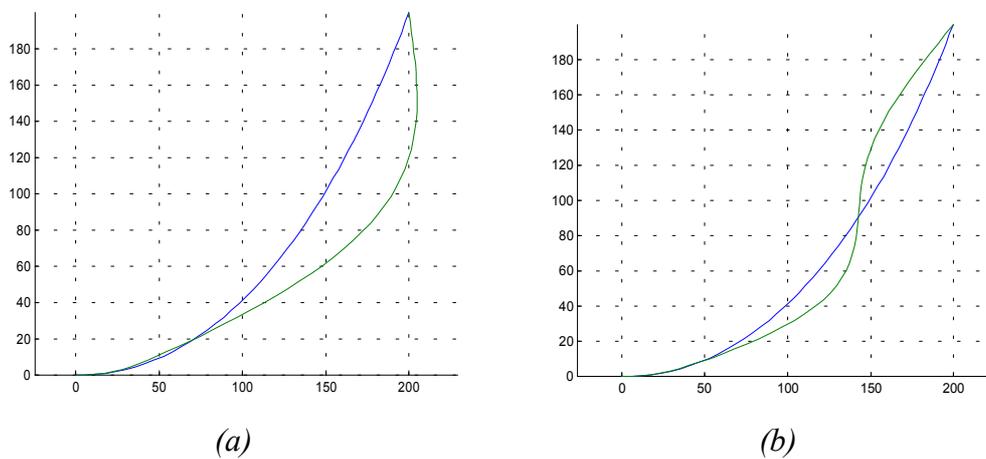


Рис. 5. Формы собственных колебаний нерастяжимого троса при  $R_{xB} = R_{zB} = 200\text{м}$ .

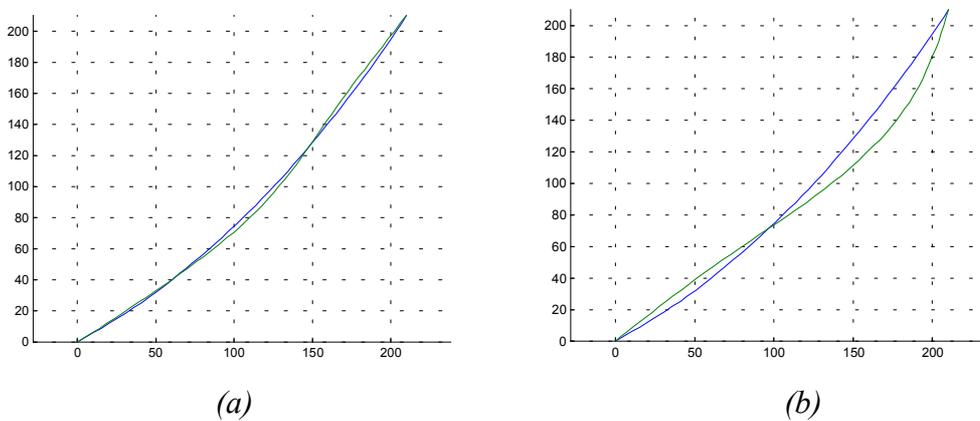


Рис. 6. Формы собственных колебаний нерастяжимого троса при  $R_{xB} = R_{zB} = 210\text{м}$ .

Этим формам соответствуют следующие циклические собственные частоты:

- в первом случае:  $\beta_1 = 0,7227$ ;  $\beta_2 = 1,1565$ ;
- во втором случае:  $\beta_1 = 1,2368$ ;  $\beta_2 = 1,8153$ .

Сразу же отметим существенную разницу между первой формой колебаний в рамках модели нерастяжимого троса и первой формой в рамках модели упругого троса. Здесь уже при первой форме колебаний на стационарной конфигурации троса наблюдается узел. Полученный результат является достаточно обоснованным, так как для колебаний по первой форме с отсутствием узлов на стационарной конфигурации трос должен проявлять свои упругие свойства, что невозможно в рамках модели нерастяжимого троса. Таким образом, первая форма и частота собственных колебаний в рамках модели нерастяжимого троса соответствуют второй форме и частоте собственных колебаний в рамках модели упругого троса. Подводя итог сказанному, отметим, что использование модели нерастяжимого троса в рассмотренном классе задач не позволяет корректно определить частоту основного (первого) тона колебаний тросовой системы. А знание именно этой частоты необходимо для отстройки от возможных резонансных режимов колебаний как при силовом, так и при кинематическом возбуждении. Учет упругости позволяет верно в вычислительном плане определять как форму, так и частоту колебаний тросовой системы.

### ***Заключение***

Представленная в статье модель одновременно учитывает как вес, так и упругость тросовой системы. Учет упругости позволяет более точно определять жесткостные характеристики в рамках решения задачи статики, особенно при усилиях в тросе, близких к критическим. Частота колебаний первого тона тросовой системы в рассматриваемом классе задач определяется именно упругими свойствами системы. Представленная модель является обобщением широко распространенной модели нерастяжимого троса. В дальнейшем представляется интересным изучение вынужденных колебаний тросовой системы с одновременным учетом перечисленных выше факторов.

### *Литература*

1. *Александров М.Н.* Судовые устройства. Л.: Судостроение, 1968. 372 с.
2. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1980. 330 с.
3. *Кульмач П.П.* Якорные системы удержания плавучих объектов. Л.: Судостроение, 1980. 336 с.
4. *Салтанов Н.В.* Гибкие нити в потоках. Киев: Наукова думка, 1974. 140 с.
5. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
6. *Сергеев С.Т.* Стальные канаты. Киев: Техника, 1974. 238 с.

УДК 681.3.068(075)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ РОССИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ MATLAB

Тарушкин В.Т., Тарушкина Л.Т., Юрков А.В.  
Санкт-Петербургский государственный университет,  
г. Санкт-Петербург  
e-mail: [yu@AJ4600.spb.edu](mailto:yu@AJ4600.spb.edu)

Вводится нечеткая элементарная теория вероятностей, которая формализуется на основе логико-математического языка (А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин, А. А. Марков и т. д.). Изучается реализация полученных теорий с помощью системы MATLAB применительно к моделированию вероятностной оценки состояния России (экономика, международная политика России, эволюция отношений Россия-СНГ).

## 1. Нечеткая элементарная теория вероятностей

Рассматривается расширение множества случайных событий до множества нечетких случайных событий.

Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  - конечное множество точек. Нечеткое множество в пространстве  $\Omega$  (по другой терминологии [1] нечеткое подмножество в универсуме  $\Omega$ ) определим как множество упорядоченных пар  $D = \{(\mu_D(\omega), \omega) : \omega \in \Omega\}$ , задаваемых своей функцией принадлежности  $\mu_D: \Omega \rightarrow L$ , где линейно-упорядоченное отношением  $\leq$  множество  $L = \{a_1, \dots, a_k\}$ , содержит наименьший 0 и наибольший 1 элементы. На  $L$  определены  $\wedge, \vee$  - двуместные операции ( $\min, \max$  для  $L = \{0, 0.1, \dots, 1\}$ ), одноместная операция  $N$  ( $N(a) = 1 - a$  для  $a \in \{0, 0.1, \dots, 1\}$ ). Теоретико - множественные операции над элементами  $\mathfrak{S}$  алгебры нечетких множеств следующим образом для всех  $\omega \in \Omega$  выражаются через функции принадлежности:

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(\omega) = \mu_A(\omega) \vee \mu_B(\omega),$$

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_C(\omega) = \mu_A(\omega) \wedge \mu_B(\omega),$$

$$C = \overline{A} \Leftrightarrow \mu_C(\omega) = N \mu_A(\omega).$$

В частности, для  $L = \{0, 0.1, \dots, 1\}$  имеем:

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(\omega) = \max(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)),$$

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_C(\omega) = \min(\mu_A(\omega), \mu_B(\omega)),$$

$$C = \bar{A} \Leftrightarrow \mu_C(\omega) = 1 - \mu_A(\omega).$$

Аналогичным образом:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(\omega) \leq \mu_B(\omega), \quad A = B \Leftrightarrow \mu_A(\omega) = \mu_B(\omega).$$

В качестве  $\mathfrak{S}$ , например, можно взять  $\mathfrak{S} = \{D : D \subseteq \Omega\}$  – множество всех нечетких подмножеств  $\Omega$ , содержащее  $k^n$  элементов. Будем следующим образом интерпретировать понятия теории нечетких множеств:  $\Omega$  – достоверное событие;  $\omega_i$  – элементарное событие;  $\emptyset = \{(0, \omega_1), \dots, (0, \omega_n)\}$  – невозможное событие;  $A, B, C, D, \dots$  – нечеткие случайные события;  $A \cup B$  – событие, состоящее в том, что произошло  $A$  или  $B$ ;  $A \cap B$  – событие, состоящее в том, что произошло  $A$  и  $B$ . В силу того, что в теории нечетких множеств [1] не имеет место закон исключенного третьего  $A \cup \bar{A} \subseteq \Omega$  ( $A \cup \bar{A} \neq \Omega$ ), изменится интерпретация дополнения и разности множеств, что приведет к тому, что не все формулы классической теории будут иметь место (Теорема 2). Поскольку для  $L = \{0, 1\}$  функция принадлежности нечетких множеств превращается в характеристическую функцию, нечеткие множества вида  $\{(1, \omega) : \omega \in \Omega\}$  есть не что иное, как другое обозначение классических множеств  $\{\omega : \omega \in \Omega\}$ ; нечеткие теоретико-множественные операции превращаются в классические, то имеет место

*Теорема 1.* Алгебра  $\mathfrak{S}$  является расширением  $\mathfrak{S}^* = \{A : A \subseteq \Omega\}$ - классической алгебры случайных событий [2].

Элементарная теория на логико-математическом языке строится для алгебраической системы

$$\langle L, \leq, \wedge, \vee, N, 0, 1 \rangle.$$

Проводится сравнение с подходами в системах MATLAB и DEDUCTIO.

## **2. Однократное бросание монеты (интерпретация аксиоматики А. Н. Колмогорова)**

В классическом случае предполагается, что монета падает на горизонтальную плоскость. Здесь будем предполагать, что монета падает на “нечеткую” горизонтальную плоскость (волнообразную горизонтальную поверхность, содержащую “примерно прямые линии” по терминологии Л. Заде [3]). Здесь  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ;  $\Gamma = \{(1, \omega_1), (0, \omega_2)\}$ -исход, состоящий в выпадении “герба”;  $P = \{(0, \omega_1), (1, \omega_2)\}$ -исход, состоящий в выпадении “решетки”;  $A = \{(0.5,$

$\omega_1$ ),  $(0, \omega_2)$ }- исход, состоящий в выпадении “почти герба” (монета лежит со значительным наклоном, но “герб” виден). Здесь  $\omega_1$  принадлежит  $A$  с значением 0.5. Событие  $A$  есть частный случай события  $\Gamma$ :  $A \subseteq \Gamma$ . Аналогичным образом  $B = \{(0, \omega_1), (0.5, \omega_2)\}$ - исход состоящий в выпадении “почти решетки” и  $B \subseteq P$ . Здесь  $L = \{0, 0.5, 1\}$ , алгебра  $\mathfrak{S}$  содержит 9 элементов и справедливо одно из положений теории А.Н. Колмогорова:

*Аксиома 1.*  $\mathfrak{S}$ - алгебра нечетких случайных событий.

Аналогичным образом:

*Аксиома 2.*  $p(\Omega) = 1$ .

Нечеткие случайные события  $C$  и  $D$  будем называть несовместными, если  $C \cap D = \emptyset$ . Прямым вычислением пересечения убеждаемся, что  $P, \Gamma$  - несовместны.

*Аксиома 3.* Функция вероятности  $p: \mathfrak{S} \rightarrow [0, 1]$  конечно-аддитивна для попарно несовместных нечетких случайных событий.

Из этой аксиомы аналогично классическому случаю получаем:

$$P(\emptyset) = 0, p(\Gamma) = p(P) = 0.5.$$

*Аксиома 4.* Если  $D_1 \subseteq D_2$ , то  $p(D_1) \leq p(D_2)$ .

Эта аксиома в классической теории доказывается, поскольку там  $D_1$  и  $D_2 \setminus D_1$  несовместны. Здесь это доказательство не проходит, например, для  $\Gamma$  и  $A$  имеем:  $\Gamma \setminus A = \Gamma \cap \bar{A}$ ,  $\mu_{\Gamma \setminus A}(\omega_1) = 0.5$ ,  $\mu_{\Gamma \cap (\Gamma \setminus A)}(\omega_1) = 0.5$ . Поскольку для любого нечеткого случайного события  $D$  имеем  $\emptyset \subseteq D \subseteq \Omega$ , то в силу аксиомы 4 получаем  $0 \leq p(D) \leq 1$ . Задав  $p(A) \leq 1/2$ ,  $p(B) \leq 1/2$  и оставшиеся вероятности 3 нечетких случайных событий нулями, завершим построение функции  $p$  на алгебре  $\mathfrak{S}$ .

*Теорема 2.* В нечеткой элементарной теории вероятностей формула  $p(D) = 1 - p(\bar{D})$  не имеет места.

Для доказательства в рассматриваемой задаче с бросанием монеты берем  $L = \{0, 0.1, \dots, 1\}$ . Используя  $0.1, \dots, 0.9$ , построим девять “почти гербов” и девять “почти решеток”. Пусть один из “почти гербов” имеет вид  $D = \{(0.4, \omega_1), (0, \omega_2)\}$ , тогда  $\bar{D} = \{(0.6, \omega_1), (1, \omega_2)\}$ . Поскольку  $D \subseteq \bar{D}$ , то в силу аксиомы 4, если  $p(\bar{D}) = 1/3$ , то  $p(D) \leq 1/3$ , а по классической формуле  $p(D) = 2/3$ .

### **3. Оценка состояния экономики России по формуле Байеса**

В истории России можно выделить четыре периода, аналогичные циклам Н.Д. Кондратьева [4]:

Киевская Русь – татаро- монгольское нашествие –

Московская Русь (1);

Российская империя – первая мировая война – Советская Россия (2);

СССР – вторая мировая война, холодная война-демократическая Россия (3);

СНГ – локальные войны – союзное государство (Россия-Беларусь и т.д.) (4).

Считая, что Россия находится в начале восходящей волны цикла (4), для  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$  и промежутка времени  $[t, T]$  (годы, соответствующие восходящей волне) сформулируем следующие исходы  $D_i = \{(0, \omega_1), \dots, (1, \omega_i), \dots, (0, \omega_6)\}$  ( $i=1, \dots, 6$ ), которые будем интерпретировать в экономических терминах [4].

D1: "Сильный прирост валовой продукции промышленности".

D2: "Сильный рост интенсивности технологического обновления ведущих отраслей хозяйства."

D3: "Сильное снижение энергозатрат."

D4: "Сильный прирост валовой продукции сельского хозяйства."

D5: "Максимальное регулирование отраслей хозяйства которые близки к необратимым изменениям."

D6: "Сильное снижение загрязнения окружающей среды."

Считая, что существует организация российского общества на промежутке  $[t, T]$ , для которой  $p(\Omega) = 1$ , при предположении равновероятных возможностей развития разных направлений для восходящей волны (4), имеем априорные вероятности  $p(D_i) = 1/6 = 0.17$ . Множество  $L = \{0, \text{нет}, \text{слабый}, \text{сильный}, \text{критическое}, \text{максимальное}, 1\}$  (здесь 0 = нет, 1 = максимальное) дает возможность построить алгебру  $\mathfrak{F}$  нечетких случайных событий для рассматриваемой задачи. Отметим, что несовместные события здесь могут происходить одновременно. Пусть наряду с  $D_1, \dots, D_6$  может осуществиться нечеткое случайное событие  $B$ : "Слабый прирост валовой промышленной продукции за год; сильный рост интенсивности технологического обновления ведущих отраслей хозяйства; сильное снижение энергозатрат; слабый прирост валовой продукции сельского хозяйства; сильное регулирование отраслей хозяйства, которые близки к необратимым изменениям; сильное снижение загрязнения окружающей среды". Это означает, поскольку  $D_1, \dots, D_6$  образуют полную группу попарно несовместных событий, что

$$B = \bigcup_{i=1}^6 (B \cap D_i).$$

В силу того, что  $D_1, \dots, D_6$  может быть только трех существенно различных видов: нет, слабое, сильное (с учетом слабый = слабое и т.д.), при этом, функции принадлежности определяем так, чтобы было (сильное,  $\omega_i$ ) = (критическое,  $\omega_i$ ) = (максимальное,  $\omega_i$ ) ( $i = 1, \dots, 4, 6$ ). Отсюда  $p(B/D_i) = 1/3$  для  $i=1, \dots, 4, 6$ . Аналогичным образом  $p(B/D_5) = 1/5$ .

Здесь, как и в классическом случае, вводится условная вероятность

$$p(D_i / B) = p(B \cap D_i) / p(D_i)$$

и формула Байеса

$$p(D_i / B) = (p(D_i) p(B/D_i)) / \sum_{j=1}^6 p(D_j) p(B/D_j)$$

дает для года  $[t_{s+1}, t_{s+2}]$  при условии реализации события  $B$  за год  $[t_s, t_{s+1}]$  значения апостериорных вероятностей

$$p(D_5 / B) = 3/28 = 0.11,$$

$$p(D_i / B) = 5/28 = 0.18 \quad (i = 1, \dots, 4, 6).$$

#### 4. Оценка состояния экономики России на основе цепей Маркова

В нечеткой трактовке каждый исход

$$D_{mi} = \{ (0, \omega_1), \dots, (a_m, \omega_i), \dots, (0, \omega_6) \}, \quad a_m \in L \quad (i = 1, \dots, 6)$$

может быть для  $t = t_s$  и  $i = 1, \dots, 4, 6$  одним из трех видов:  $D_{1i}^s, D_{2i}^s, D_{3i}^s$ , для  $i = 5$  может быть одним из пяти видов:

$$D_{15}^s, D_{25}^s, D_{35}^s, D_{45}^s, D_{55}^s.$$

Предполагая, что эти последовательности образуют цепь Маркова, тогда для  $t = t_{s+1}$  условная вероятность осуществиться одному из

$$D_{1i}^{s+1}, D_{2i}^{s+1}, D_{3i}^{s+1} \quad (i = 1, \dots, 4, 6)$$

или одному из

$$D_{15}^{s+1}, D_{25}^{s+1}, D_{35}^{s+1}, D_{45}^{s+1}, D_{55}^{s+1}$$

зависит только от исходов для  $t = t_s$  и не зависит от исходов для более ранних моментов времени.

Вероятности перехода  $p_{ij}^{s+1} = p(D_j^{s+1} / D_i^s)$  образуют стохастические матрицы  $\pi_{s+1}^1, \dots, \pi_{s+1}^4, \pi_{s+1}^6$  вида:

$$\begin{matrix} p_{11}^{s+1} & p_{12}^{s+1} & p_{13}^{s+1} \\ p_{21}^{s+1} & p_{22}^{s+1} & p_{23}^{s+1} \\ p_{31}^{s+1} & p_{32}^{s+1} & p_{33}^{s+1} \end{matrix}$$

и матрицу  $\pi_{s+1}^5$ :

$$\begin{matrix} p_{11}^{s+1} & \dots & p_{15}^{s+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{51}^{s+1} & \dots & p_{55}^{s+1} \end{matrix},$$

позволяющее в соответствии с прямыми уравнениями Колмогорова-Чепмена [2]

$$p_{s+1}^i = p_0^i \pi_1^i \dots \pi_{s+1}^i \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (5)$$

вычислить вероятности будущих исходов

$$p_{s+1}^i = (p_{s+1,1}^i, p_{s+1,2}^i, p_{s+1,3}^i) \quad (i = 1, \dots, 4, 6),$$

$$p_{s+1}^5 = (p_{s+1,1}^5, \dots, p_{s+1,5}^5)$$

по их значениям  $p_0^i$  в настоящем

(здесь 0- это 2001 год,  $p_{s+1,j}^i = p(D_j | i^{s+1})$ ).

Если уравнение (5) переписать в виде  $p_{s+1}^i = p_s^i \pi_{s+1}^i$ , то их справедливость, как и в классическом случае [2], следует из формулы полной вероятности. Матрицы  $\pi_1^k$  ( $k = 1, \dots, 4, 6$ )

$$1/5 \quad 3/5 \quad 1/5$$

$$1/5 \quad 3/5 \quad 1/5$$

$$1/5 \quad 3/5 \quad 1/5$$

дают пример реализации в экономике в 2002 году наиболее вероятных слабых макроэкономических показателей роста.

Матрица  $\pi_1^5$

$$1/7 \quad 1/7 \quad 1/7 \quad 3/7 \quad 1/7$$

.....

$$1/7 \quad 1/7 \quad 1/7 \quad 3/7 \quad 1/7$$

дает пример регулирования отраслей, которые близки к необратимым изменениям, в окрестности наиболее вероятных критических значений.

Рассматриваемый подход находит приложения в экологии [5].

### 5. Вероятностная оценка политики России

Прогноз относительно времени жизни системы демократическая Россия делается для трех возможных путей ее развития.

Для моделирования политики в качестве множества элементарных событий  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  берем множество государств  $\Omega = \{\text{Алжир}, \dots, \text{США}, \dots, \text{Япония}\}$ , с которыми Россия поддерживает межгосударственные отношения. Множество  $L = \{\text{нейтральные, умеренно-дружественные, дружественные, особые квази-союзнические, квази-союзнические (партнерские), союзнические, особые союзнические}\}$ , состоящее из 7 элементов, является линейно - упорядоченным с 0 = нейтральные и 1 = особые союзнические элементами.

На множестве  $\mathfrak{S} = \{D: \mu_D: \Omega \rightarrow L\}$  аналогично [6,7] и экономике определяется алгебра нечетких случайных событий, где  $D = \{(\mu_D(\omega), \omega): \omega \in \Omega\}$  - нечеткое случайное событие в пространстве

$\Omega$ . На  $\mathcal{S}$ , состоящем из  $7^n$  элементов, для  $t_0 = 2002$  год определяем функцию вероятности  $p: \mathcal{S} \rightarrow [0,1]$ , которая задает априорные вероятности.

Аналогичным образом определяем условные вероятности.

По формуле Байеса определяем апостериорные вероятности интересующих нас событий 2002 года. Уточнение этих рассмотрений проводим на основе цепей Маркова и уравнений Колмогорова - Чепмена. Например, для случая США и элементов  $L$ : умеренно-дружественные, дружественные, особые квази-союзнические, партнерские, союзнические, построив стохастическую матрицу, изучаем отношения России и США после окончания холодной войны и строим их прогноз на 2003 год.

Для изучения эволюции отношений Россия-СНГ берем множество элементарных событий

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{11}\}$ , где  $\omega_1 =$  Азербайджан, ...,  $\omega_{11} =$  Украина.

В качестве  $L$  берем множество из четырех элементов: нейтральные, квази-союзнические, союзнические, особые союзнические. Множество нечетких случайных событий  $\mathcal{S}$  имеет  $4^{11}$  элементов и строится средствами дискретной математики. Первоначально вероятности интересующих нас событий можно вычислять по формуле Байеса, а затем уточнять на основе теории цепей Маркова для нечетких случайных событий [7], где для  $t = t_{s+1}$  имеем стохастические переходные матрицы  $p_{s+1}^1, \dots, p_{s+1}^{11}$  вида:

$$p_{11}^{s+1} \quad p_{12}^{s+1} \quad p_{13}^{s+1} \quad p_{14}^{s+1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_{41}^{s+1} \quad p_{42}^{s+1} \quad p_{43}^{s+1} \quad p_{44}^{s+1},$$

где  $p_{ji}^{s+1} = p(D_{jk}^{s+1} / D_{ik}^s)$ ,  $D_{mi} = \{(0, \omega_1), \dots, (a_m, \omega_i), \dots, (0, \omega_{11})\}$ ,  $a_m \in L$ , ( $i = 1, \dots, 11$ ).

Осуществляется буквенное и числовое моделирование вычислений по формуле Байеса и на основе уравнений Колмогорова-Чепмена.

### Литература

1. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1986, 432 с.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.
3. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976, 165 с.
4. Кондратьев Н. Д. Проблемы экономической динамики. М.: Экономика, 1989, 525 с.

5. *Tarushkin V., Tarushkina L.* The Ecological Model and Estimate of Risk for Environment of the Greater Town. First Russian SETAC symposium. St. Petersburg, Russia, 1998, p.114.
6. *Тарушкин В.Т.* Вероятностные методы оценки состояния России // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2001. Т. 8. Вып.1. С. 340-341.
7. *Тарушкин В.Т., Тарушкина Л.Т., Юрков А.В.* Цепи Маркова для нечетких случайных событий // Научно-техническая межвузовская конференция с международным участием V Царскосельские чтения. СПб.: Изд. ЛГУ им. А.С. Пушкина, 2001. С. 71-73.

УДК 519.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ В СРЕДЕ MATLAB ПОМЕХОЗАЩИЩЕННОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Тимченко А.А., Снитюк В.Е., Стеценко И.В., Гресько С.А.,  
Ланских Е.В.

*Черкасский государственный технологический университет, г. Черкасск*  
*e-mail: [cheti@cheti.cherkassy.ua](mailto:cheti@cheti.cherkassy.ua)*

Доклад посвящен изложению результатов применения MATLAB-приложений к решению задач построения математических моделей основных арифметических операций (сложение, умножение, возведение в степень и обратные им).

### ***Введение. Постановка задачи исследования***

Целью исследований является получение количественных зависимостей между параметрами операции, отыскание оптимальных условий протекания процессов реализации операций и оптимизация результатов (с использованием обратной связи для корректировки последующего вычисления на основе предыдущего).

За последние полвека ЭВМ прошла несколько стадий развития: от т.н. «большого арифмометра» и «большой записной книжки», через решение отдельных интеллектуальных задач, к реализации задач искусственного интеллекта. В отличие от человека, когда образное мышление начинает процесс образования и завершается решением творческих задач, ЭВМ, в силу ограниченности ресурсов, только подходит к решению интеллектуальных задач «образного мышления». Изначально ЭВМ различных классов создавались для конкретных и практически полезных математических расчетов и хранения больших массивов информации. Для таких вычислений и поныне используются ПЭВМ с наборами прикладных программ на различных языках программирования. Появление специальных программных средств (систем, вычислительных сред) для численных расчетов и символьных преобразований, таких как Eureka, Mathcad, MATLAB, Mathematica и др., существенно расширяет возможности ПЭВМ в

прикладных исследованиях.

Задачей настоящего исследования (с использованием логико-арифметических моделей) является проведение экспериментов с целью определения помехозащищенности арифметических операций. Операции рассматриваются как простейшие функции одной или нескольких переменных:  $y=f\{x_1, x_2\}$ . В процессе экспериментов данные функции представляются в виде аппроксимирующих степенных полиномов типа Колмогорова-Винера (например, в виде многомерной параболы ( $y^*=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_{12}x_1x_2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{99}x_2^9$ )).

### ***1. Формирование представительной выборки для проведения эксперимента***

Считая известными из школьного курса таблицы сложения (вычитания), умножения (деления) принимаем их за центрированные значения, и задаваясь нормальным законом распределения, вводим соответствующие отклонения (например,  $\pm 1-5\%$ ). В результате применения исходных таблиц с учетом вносимых отклонений получаем соответствующее отклонение результата до  $\pm 5\%$ . Исходные данные в зависимости от значения по абсолютной величине разбиваются на три группы – малые, средние и большие. В соответствие с этим получаем результаты, представленные в виде трех групп ( $y=\{y_m, y_c, y_b\}$ ).

### ***2. Нахождение параметров модели операций***

Применяя процедуры ППП ФАКТОР [3] (IDENT, PROGPOW, IDYNS), основанные на методе наименьших квадратов (МНК) повышенной точности и возможности программного выбора слагаемых аппроксимирующего выражения, определяем возможное отклонение исследуемых параметров от их истинных значений. В соответствии с методами планирования экспериментов проведен широкомасштабный эксперимент, позволяющий статистически оценить область допустимых отклонений выполнения операций. Результаты эксперимента обработаны в среде MATLAB. Управляемое взаимодействие MATLAB и ППП ФАКТОР осуществляется только на уровне обмена данными. Разработчики предлагают использовать ППП ФАКТОР как Toolbox MATLAB.

### ***Заключение. Анализ полученных результатов***

Как известно, современная ЭВМ либо работает (когда исправна), либо не работает (когда неисправна), и в этом случае, в отличие от человека, не дает ни результата, ни его оценки. Проведенные эксперименты позволяют сделать выводы о возможности построения программно-технических вычислительных комплексов повышенной надежности с использованием корректирующих и восстанавливающих воздействий [2].

### ***Приложение. ППП ФАКТОР***

Разработанный в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины ППП ФАКТОР предназначен для решения задач идентификации параметров динамических систем, аппроксимации функций нескольких переменных полиномами типа Колмогорова-Винера, экстраполяции функции, заданной на дискретном множестве точек и др. [1]. ППП состоит из программы-монитора (оболочка), трех основных функциональных программ (IDYNS, IDENT, PROGPOW) и обслуживающих программ и работает в режиме диалога. Исходные данные вводятся с клавиатуры, результаты выводятся на экран и оформляются в виде файла результатов. Программа IDYNS предназначена для решения задачи идентификации параметров линейных стационарных динамических систем по известным значениям фазовых переменных, их производных и управляющих воздействий. В основу данной программы положен МНК повышенной точности. Программа IDENT используется для решения задачи аппроксимации функции нескольких переменных полиномом произвольной степени. Функция и ее аргументы задаются на дискретном множестве точек в виде табличных значений. Вид и степень аппроксимирующего полинома задаются во входном потоке данных. Коэффициенты полинома находятся из условия минимума среднего квадратичного отклонения от значений функции. Прогноз осуществляется при помощи программы PROGPOW. Программируемая величина задается на дискретном множестве точек (берутся 5-10 точек, предшествующие прогнозным). Исходное множество точек заранее делится на два: множество L точек, по которым строится модель прогноза в виде аппроксимирующего полинома, и множество N точек для проверки соответствия построенной модели исходной функции. Затем по построенной модели находятся значения функции в точках прогноза. Ниже приводятся результаты работы

вышеперечисленных программ.

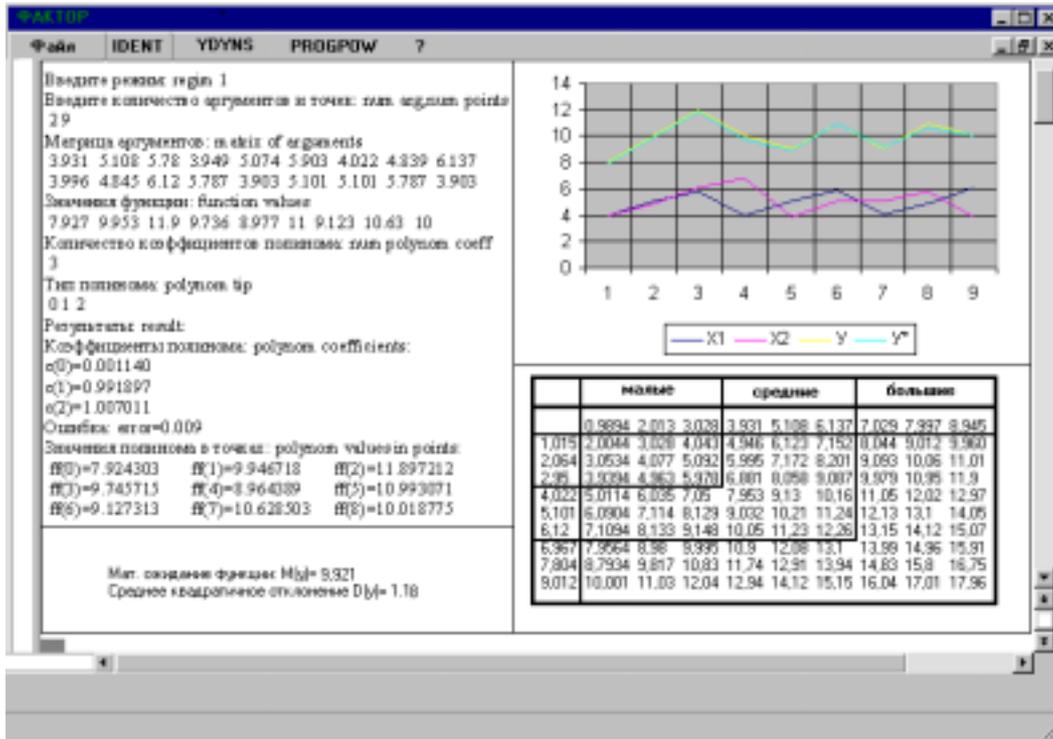


Рис. 1. Рабочее окно программы IDENT ППП ФАКТОР (операция сложения с зашумленными результатами).

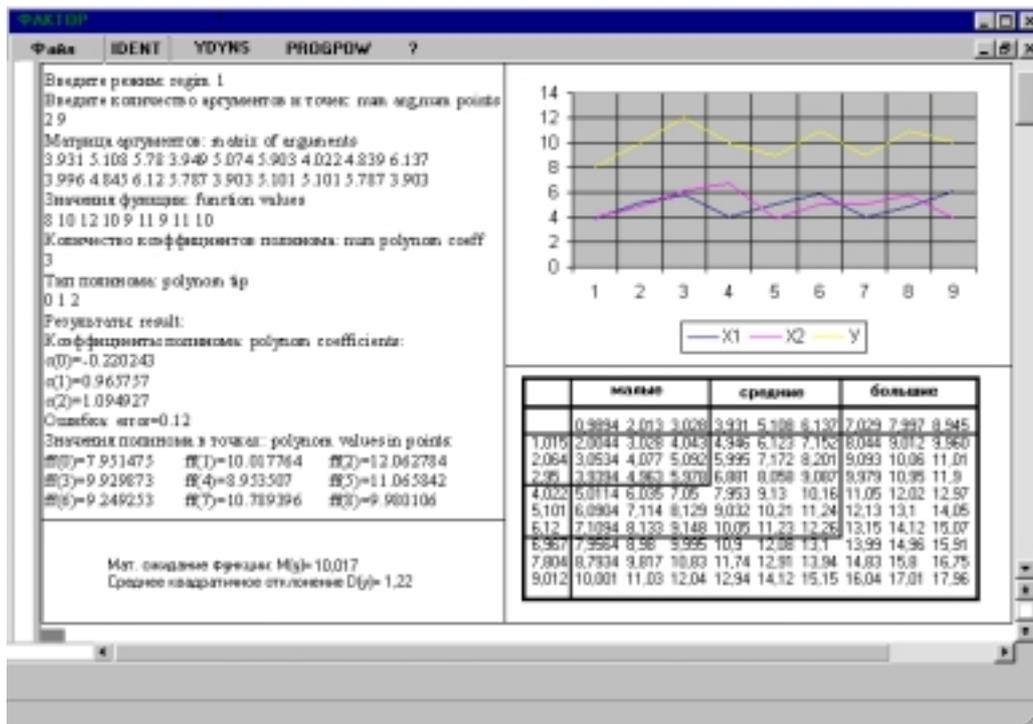


Рис. 2. Рабочее окно программы IDENT ППП ФАКТОР (операция сложения с точными результатами).

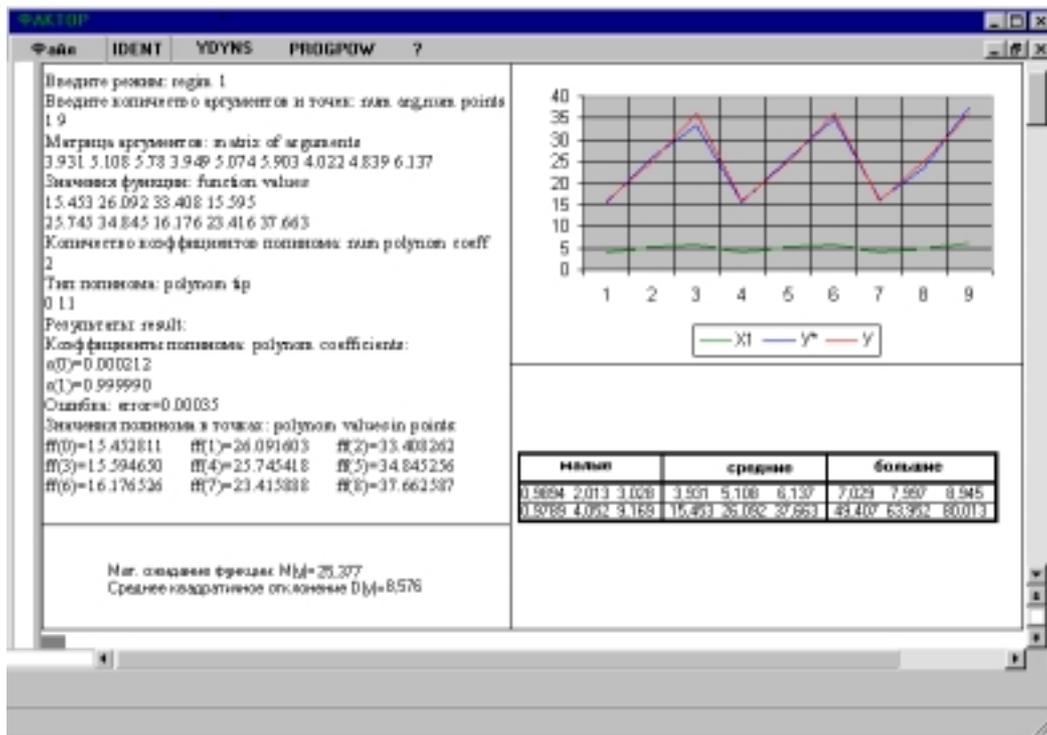


Рис. 3. Рабочее окно программы IDENT ППП ФАКТОР (операция возведения в степень с зашумленными результатами).

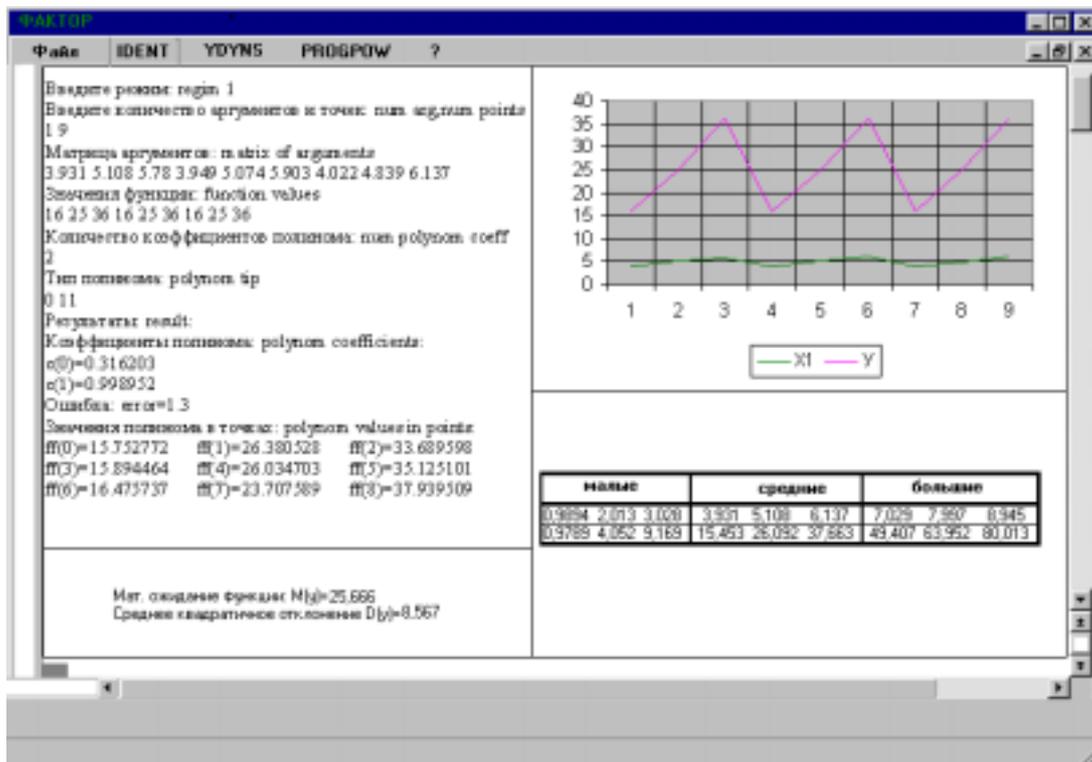


Рис. 4. Рабочее окно программы IDENT ППП ФАКТОР (операция возведения в степень с точными результатами).

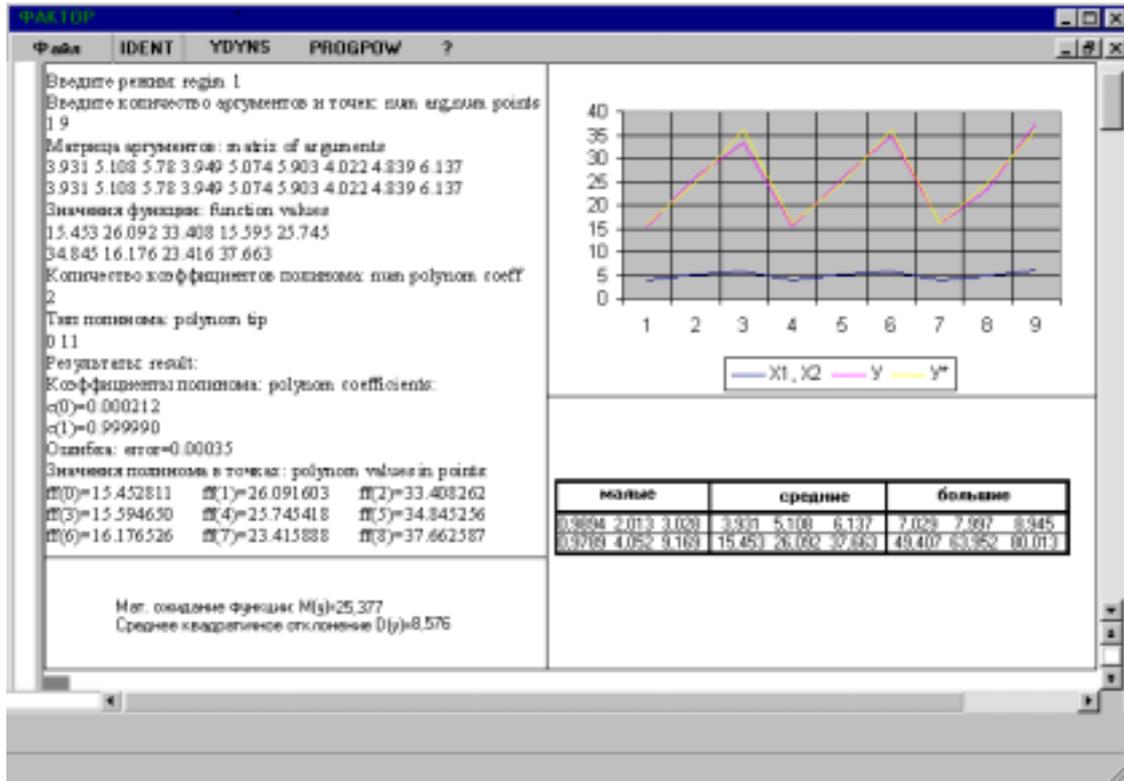


Рис. 5. Рабочее окно программы IDENT ППП ФАКТОР (операция умножения эквивалентная возведению в степень с зашумленными результатами).

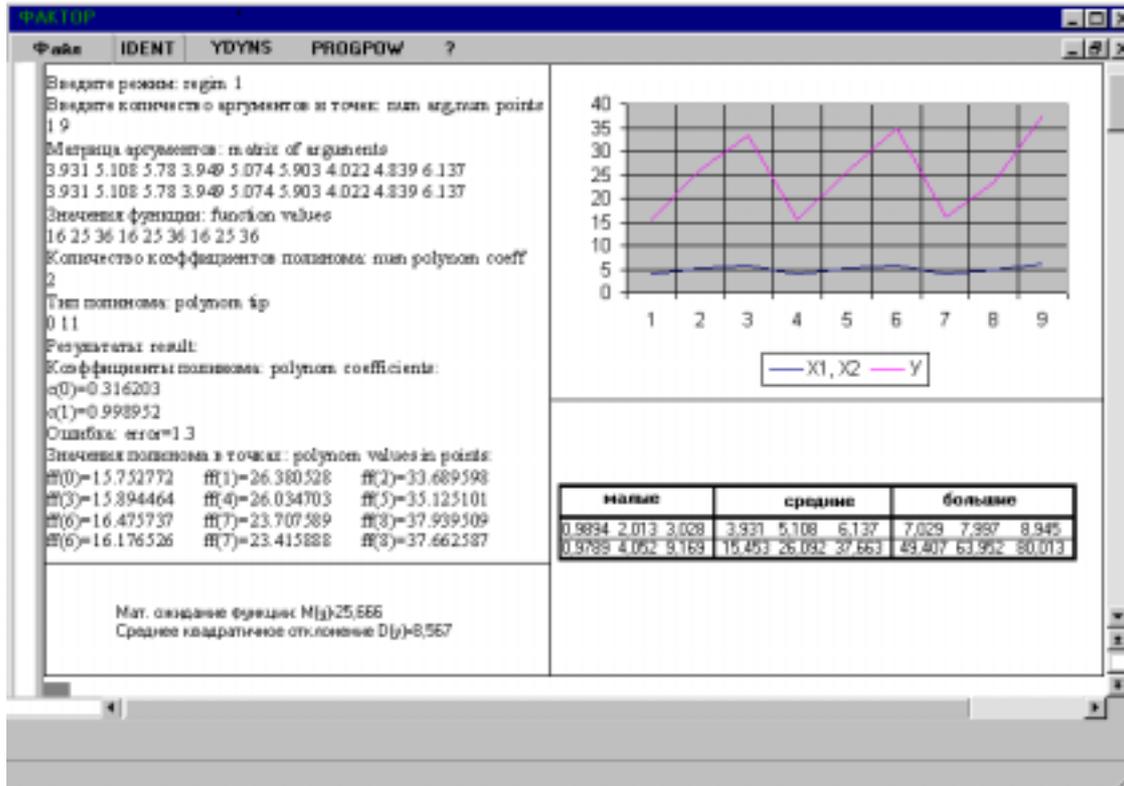


Рис. 6. Рабочее окно программы IDENT ППП ФАКТОР (операция умножения эквивалентная возведению в степень с точными результатами).

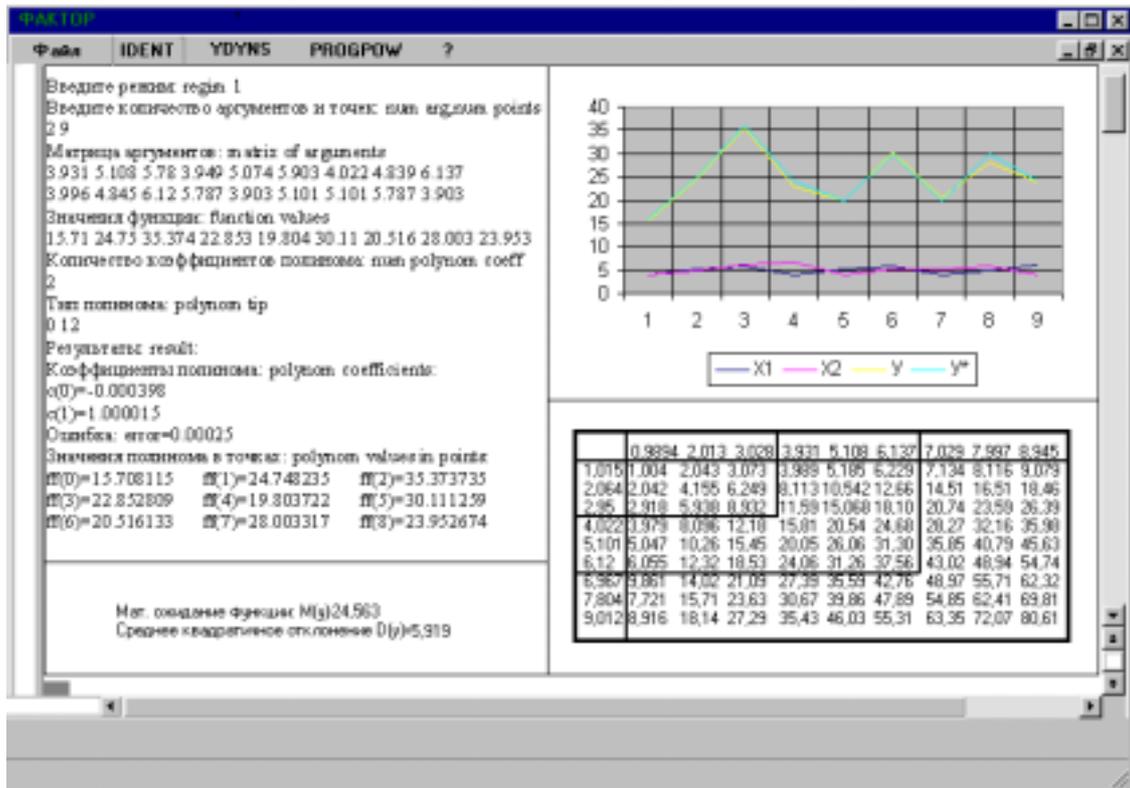


Рис. 7. Рабочее окно программы IDENT PPP ФАКТОР (операция умножения с зашумленными результатами).

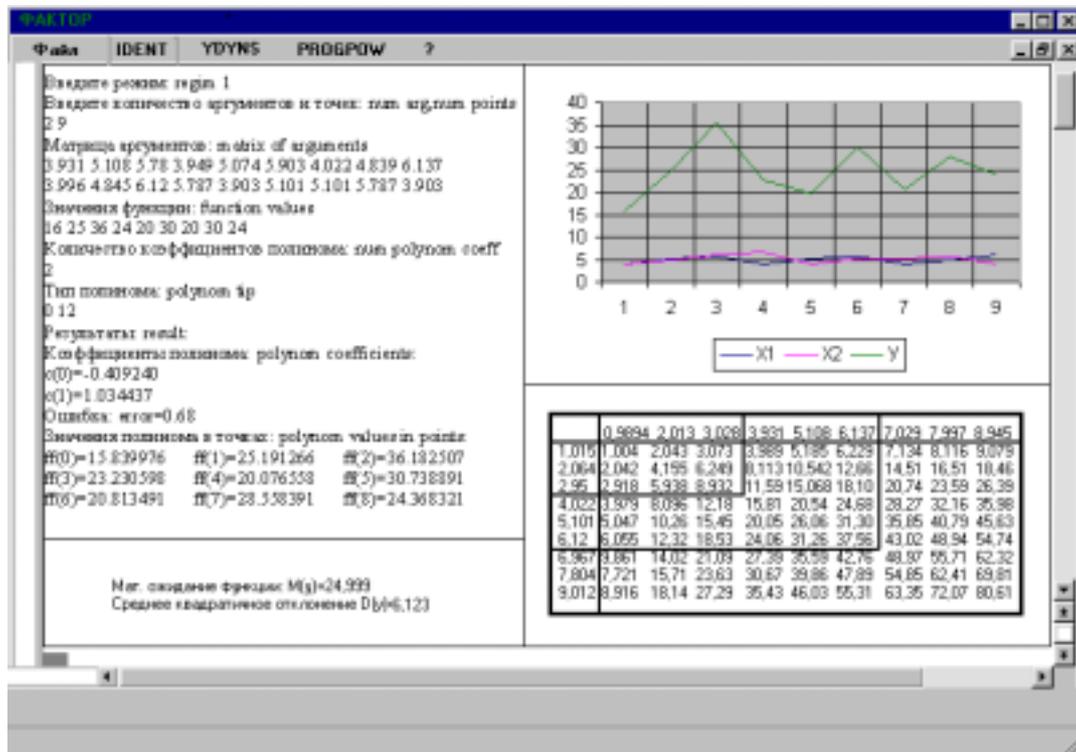


Рис. 8. Рабочее окно программы IDENT PPP ФАКТОР (операция умножения с точными результатами).

### *Литература*

1. *Ивахненко А.Г., Козубовский С.Ф., Строкова Т.И., Тимченко И.К., Осипенко В.В.* Обратное преобразование вероятностных характеристик в исходную реализацию случайного процесса как средство его прогнозирования и экстраполяции. //Автоматика №1, 1984. с. 9-22.
2. *Тимченко А.А., Родионов А.А.* Основы информатики системного проектирования объектов новой техники. К.: Наук. думка, 1991. 152 с.
3. Комплекс программ факторизации, идентификации и прогнозирования характеристик сложных систем «ФАКТОР»: Проспект / ИК АН Украины. К., 1985. 2 с.

УДК 519.6

## ОЦЕНКА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАВИГАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМОЙ МЕЖСАМОЛЕТНОЙ НАВИГАЦИИ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ В MATLAB

Шахов Е.В., Гахович В.Д.

*Европейский университет финансов, информационных систем,  
менеджмента и бизнеса, г. Киев, Украина  
e-mail: [ygen@profit.net.ua](mailto:ygen@profit.net.ua)*

Решение задачи управления воздушным движением в районе крупных аэродромов затруднительно ввиду высокой интенсивности полетов летательных аппаратов. Существенное влияние при этом оказывают технические ограничения систем межсамолетной навигации, которые должны обеспечить в автоматическом режиме выполнение требований, предъявляемых к уровню безопасности полетов. Международная организация по безопасности полетов (ИКАО) определила уровень безопасности полетов в виде допустимой вероятности столкновения  $P_{CT} \leq 10^{-9}$ . В качестве критерия безопасности полетов выступает вероятность

$$P_{CT} = 1 - \iiint_V W(i, d, h) diddh,$$

где  $V$  – объем эллипсоида ошибок определения взаимных координат летательных аппаратов;  $W(i, d, h)$  – трехмерная плотность вероятности распределения ошибок.

Решение задачи достижения требуемого уровня безопасности полетов при увеличении допустимого уровня их интенсивности возможно за счет создания прецизионных датчиков с включением их в контур систем автоматического управления летательного аппарата, либо за счет интегрирования имеющихся на борту систем в комплексную систему межсамолетной навигации. Второй способ представляется более предпочтительным, поскольку не требует больших материальных вложений и основан на рациональном использовании имеющейся на борту информационной избыточности [1].

Рассмотрен вариант комплексирования традиционно

используемых систем навигации, а именно: инерциальной навигационной системы, барометрического высотомера, радиотехнической системы дальней навигации, а также системы измерения взаимной дальности и передачи навигационной информации [2]. Предполагается наличие достоверных математических моделей перечисленных систем, описывающих их состояние в виде векторов:  $\delta\vec{x}_{ИНС}$ ,  $\delta\vec{x}_{БВ}$ ,  $\delta\vec{x}_{РСДН}$ ,  $\delta\vec{x}_{РИВК}$ . В бортовой ЭВМ осуществляется оптимальная обработка информации с применением метода калмановской фильтрации. Состояние комплекса описывается стохастическим матричным дифференциальным уравнением вида

$$\delta\vec{x}_{k+1,k} = F_{k+1,k} \delta\vec{x}_k + G_{k+1,k} \vec{w}_k,$$

где  $\delta\vec{x} = [\delta\vec{x}_{ИНС}, \delta\vec{x}_{БВ}, \delta\vec{x}_{РСДН}, \delta\vec{x}_{РИВК}]$  - вектор состояния комплекса;  $\vec{w}$  - вектор, формирующий гауссовский белый шум с известными характеристиками.

Модель измерений имеет вид:

$$\vec{z}_k = H_k \delta\vec{x}_k + D_k \vec{v}_k,$$

где  $H$  – матрица связи комплексного измерителя;  $v$  - гауссовский белый шум измерений с известными характеристиками.

Моделирование процесса фильтрации осуществлялось в системе MATLAB. Представление исходных моделей в матричном виде упростило программирование и отладку. Результаты моделирования позволяют сделать вывод о том, что рассмотренный навигационный комплекс позволяет осуществить самолетовождение с вероятностью столкновения, не превышающей заданную ИКАО на интервалах и дистанциях порядка 150-170 м.

### *Литература*

1. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
2. *Бабич О.П.* Обработка информации в навигационных комплексах. М: Машиностроение, 1991.